

Mathematik und Logik

1. Übungsaufgaben

2007-10-16

1. Rechnen Sie $(243)_b$ ins Dezimalsystem um, für die Basis b :
 - (a) $b = 5$;
 - (b) $b = 8$;
 - (c) $b = 10$;
 - (d) $b = 12$;
 - (e) $b = 16$;
 - (f) $b = 60$.
2. Rechnen Sie umgekehrt die Zahl 243 (Dezimalsystem) in jede der Basen aus Beispiel 1 um. Und außerdem für $b = 2$.
3. Beweisen Sie, daß die b -adische Darstellung eindeutig ist.
4. Beweisen Sie, daß 0 dann und nur dann eine Zahl teilt, wenn diese ebenfalls 0 ist, d.h.

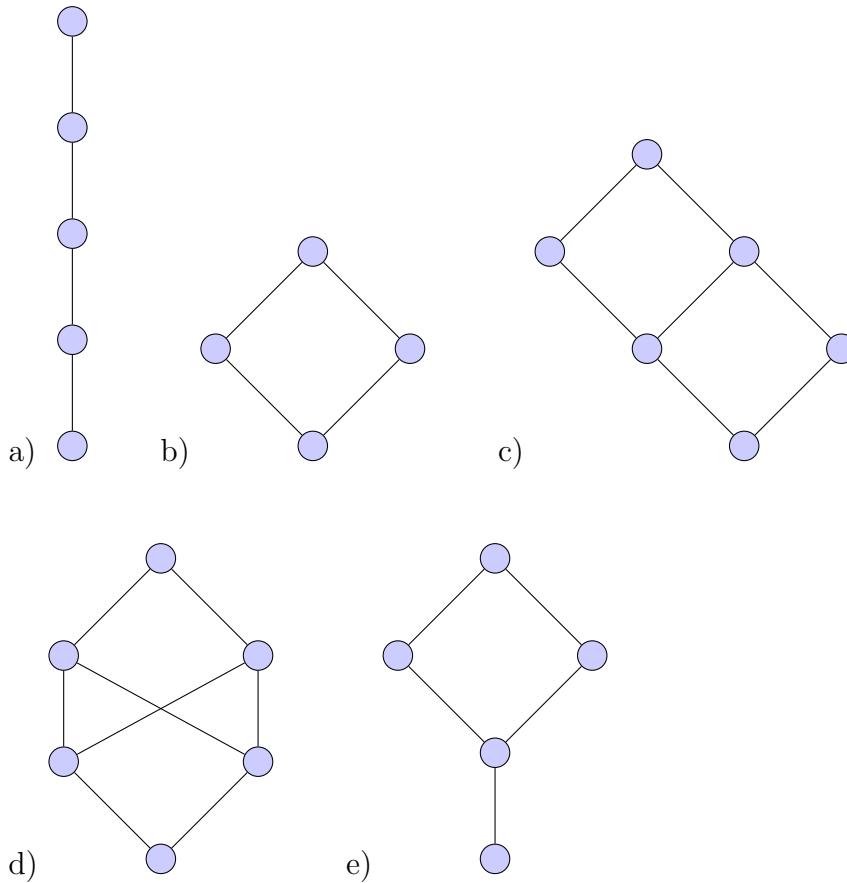
$$0 \mid a \iff a = 0.$$

5. Bestimmen Sie jeweils alle gemeinsamen Teiler d von m und n :
 - (a) $m = 12$ und $n = 16$;
 - (b) $m = 32$ und $n = 40$;
 - (c) $m = 0$ und $n = 15$.
 - (d) $m = 0$ und $n = 0$.
 - (e) $m = 1024$ und $n = 817$.

In welchen Fällen gibt es dabei einen größten gemeinsamen Teiler?

6. Es sei d ein gemeinsamer Teiler von m und n , und x und y beliebige ganze Zahlen. Beweisen Sie, daß dann $d \mid x \cdot m + y \cdot n$.
7. Es sei $m = q \cdot n + r$ (alles ganze Zahlen). Zeigen Sie, daß eine ganze Zahl d genau dann ein gemeinsamer Teiler von m und n ist, wenn sie ein gemeinsamer Teiler von n und r ist.
8. Zeigen Sie: Wenn $a \mid b$ und $c \mid d$, dann auch $a \cdot c \mid b \cdot d$.
9. Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm für den Teilerverband von 72. (Unbekannte Begriffe schlagen Sie am besten bei wikipedia nach.)

10. a und b seien Teiler von m , und d der größte gemeinsame Teiler von a und b . Ist dann auch d ein Teiler von m ?
11. Beweisen Sie, daß es zu jedem Paar ganzer Zahlen höchstens einen größten gemeinsamen Teiler geben kann.
12. Kann das Hasse-Diagramm eines Teilverbands einer ganzen Zahl jeweils folgendermaßen aussehen? Welche Zahlen würden zum Beispiel passen?



13. Wie würden Sie einen sinnvollen Teilbarkeitsbegriff für rationale Zahlen definieren?