

Mathematik und Logik

5. Übungsaufgaben

bis 2008-11-11, Lösungen

1. Geben Sie (mindestens) ein konkretes Gegenbeispiel zum Assoziativgesetz für die logische Implikation an, d.h., suchen Sie konkrete Aussagen A, B, C , sodaß

$$(A \implies (B \implies C)) \implies ((A \implies B) \implies C)$$

NICHT gilt!

2. Beweisen Sie ein paar triviale Sätze über die Disjunktion:

(a) $A \implies A \vee B$;

Lösung: Einführung liefert:

Annahme: A

Zu zeigen: $A \vee B$

Dies folgt mittels \vee -Einführung.

(b) $A \wedge B \implies A \vee B$;

Lösung: Einführung liefert:

Annahme: $A \wedge B$

Zu zeigen: $A \vee B$

Eine \vee -Einführung besagt:

Es reicht zu zeigen: A

Dies folgt mittels \wedge -Elimination

(c) $A \vee B \iff B \vee A$;

Lösung: Gemäß \wedge -Einführung sind zu zeigen:

Erstens $A \vee B \implies B \vee A$,

Zweitens $B \vee A \implies A \vee B$,

ad $A \vee B \implies B \vee A$:

Annahme: $A \vee B$

Zu zeigen $B \vee A$

Fallunterscheidung für $A \vee B$

Es gelte: A

Dann folgt $B \vee A$ mittels einer \vee -Einführungsregel.

Es gelte: B

Dann folgt $B \vee A$ mittels der anderen \vee -Einführungsregel.

ad $B \vee A \implies A \vee B$:

analog.

(d) $A \iff A \vee A$;

Lösung: Für die Richtung von links nach rechts wird eine \vee -Introduktion angewendet.

Für die Umkehrung ist eine \vee -Elimination anzuwenden, also eine Fallunterscheidung mit hier zwei identischen Fällen.

(e) $A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$.

Lösung: In beiden Richtungen für eine zweimalige Fallunterscheidung leicht zum Ziel.

3. Beweisen Sie

$$(A \implies B) \vee (C \implies D) \implies (A \vee C \implies B \vee D).$$

Lösung: Nicht allgemeingültig!

Gelten z.B. die Fälle $(A \implies B)$ und C , so gibt es keine Möglichkeit, daraus $B \vee D$ herzuleiten.

Sehr wohl allgemeingültig ist dagegen:

$$(A \implies B) \wedge (C \implies D) \implies (A \vee C \implies B \vee D),$$

wie sich leicht mit einer Fallunterscheidung von $A \vee C$ nachweisen läßt.

4. Mit \perp bezeichnen wir die Aussage "Jede Aussage ist wahr". (Dies bedeutet, daß $\perp \implies P$ allgemeingültig ist.) Ferner verwenden wir die Abkürzung \overline{A} anstelle von $(A \implies \perp)$. Zeigen Sie damit die Allgemeingültigkeit von

(a) $\overline{\overline{A \wedge \overline{A}}}$;

Lösung: Es ist zu zeigen: $(A \wedge (A \implies \perp)) \implies \perp$.
Dies ist ein Spezialfall von $(A \wedge (A \implies B)) \implies B$.

(b) $A \implies \overline{\overline{A}}$;

Lösung: Dies ist ein Spezialfall von $A \implies ((A \implies B) \implies B)$.

(c) $\overline{A} \wedge \overline{B} \implies (A \iff B)$.

Lösung: Annahmen:

$$A \implies \perp$$

$$B \implies \perp$$

Zu zeigen: $A \iff B$

ad \implies):

weitere Annahme: A ,

zu zeigen: B

Elimination liefert aus A und $A \implies \perp$ zuerst \perp ,
woraus wegen der Natur von \perp auch B folgt.

Die Umkehrung geht analog.

(d) $\overline{\overline{\overline{A}}} \implies \overline{A}$;

Lösung: Dies ist ein Spezialfall von $((((A \implies B) \implies B) \implies B) \implies (A \implies B))$.

(e) $(A \implies B) \implies (\overline{B} \implies \overline{A})$;

Lösung: Dies ist ein Spezialfall des Transitivgesetzes: $(A \implies B) \implies (B \implies C) \implies (A \implies C)$.

(f) $A \vee \overline{A} \implies (\overline{\overline{A}} \implies A)$;

Lösung: Annahmen:

$$A \vee (A \implies \perp),$$

$$(A \implies \perp) \implies \perp;$$

Zu zeigen: A .

Wir verwenden eine Fallunterscheidung:

Fall A :

Dann sind wir bereits fertig.

Fall $A \implies \perp$:

Dann liefert die Elimination von $(A \implies \perp) \implies \perp$ zuerst \perp , und somit auch A .

In den meisten Fällen entpuppen sich diese Aussagen nach dem Einsetzen der Definition als Spezialfälle wohlbekannter allgemeingültiger aussagenlogischer Sätze.

In welchen Fällen fand die Natur der Aussage \perp tatsächlich eine Anwendung?

Lösung: Nur in (c) und (f) haben wir die Allgemeingültigkeit von $\perp \implies P$ verwendet.

5. Starten Sie die Mathematik-Software SAGE und rechnen Sie damit ein paar einfache Beispiele mit Listen:

(a) Definieren Sie $w = \text{"Eine Zeichenkette"}$

(b) $\text{len}(w)$ ergibt ihre Länge

(c) Mehrere Zeichenketten lassen sich mit $+$ verbinden .

(d) $5*w$ berechnet, was wir mit w^5 bezeichnet haben

(e) Das erste Element einer nicht-leeren Liste erhält man mit $w[:1]$, den Rest mit $w[1:]$. Allgemein gilt stets $w == w[:i]+w[i:]$, auch für negative i .

(f) Listen können in SAGE auch ganz anders aussehen. Testen Sie, so wie oben, z.B. auch für

$$z = [3,4,7,7,1,7]$$

oder für

$$s = \text{"alpha", "beta", "gamma"}$$

(g) Das Rekursionsprinzip aus der Vorlesung

$$\begin{aligned} f(\epsilon) &= x \\ f(\alpha u) &= \alpha \underset{u}{\varphi} f(u) \end{aligned}$$

wird von SAGE zwar nicht wörtlich verstanden, kann aber gemäß dem folgenden Schema dennoch leicht umgesetzt werden:

```
def f(u):
    if len(u) == 0:
        return x
    else:
        return  $\varphi(u[:1], u, f(u[1:]))$ 
```

Anmerkung: Die Einrückungen müssen eingehalten werden.

- (h) Definieren Sie die Funktion für das Spiegeln von Listen gemäß dem obigen Schema. Testen Sie diese Funktion dann insbesondere für **w**, **z** und **s** von oben.