

Mathematik und Logik

3. Übungsaufgaben

bis 2008-10-28, Lösungen

1. Wiederholen Sie die Übungen von voriger Woche anhand der Lösungen und schreiben Sie alle Unklarheiten möglichst wohlformuliert auf, damit Sie bei nächster Gelegenheit gezielt fragen können.
2. Wie läßt sich aus den Annahmen, die wir über Listen gemacht haben, folgern, daß alle Listen endlich sind.
3. Sind die Listen $u = abbaababbaababbaab$ und $v = abbaababbaababbaababbaab$ vertauschbar ($uv = vu$)? Überlegen Sie sich, wie man (allgemein) am leichtesten t, n, m finden kann, sodaß $u = t^n, v = t^m$.

Lösung: Die kürzere Liste (hier u) muß ein Präfix der längeren (hier v) sein. Die Restliste sei r . Dann gilt $v = ur$, und die Vertauschbarkeit besagt: $uur = uru$. Linkskürzen ergibt $ur = ru$.

Im konkreten Fall besagt dies, daß auch $u = abbaababbaababbaab$ und $r = abbaab$ vertauschbar sein müssen.

Mit diesen kürzeren Listen fahren wir fort, bis eine der Listen eine Potenz der anderen ist.

Hier ist dies bereits im nächsten Schritt der Fall, da $u = r^3$.

Somit ist dann auch $v = ur = r^3r = r^4$, und r bereits die gesuchte Liste.

4. Die Menge Σ sei einelementig. Zeigen Sie, daß es zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau eine Liste (über Σ) der Länge n gibt.
5. Vereinfachen Sie die Introduktionsregeln und das Induktionsprinzip sowie das Rekursionsschema für Listen über einer einelementigen Grundmenge. Versuchen Sie dann, das Induktionsprinzip für die natürlichen Zahlen zu formulieren.

Lösung: Das Introduktionsprinzip wird zu:

$$\frac{P(0) \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} P(n) \implies P(1+n)}{\forall_{n \in \mathbb{N}} P(n)} \text{NE}$$

Das Rekursionsprinzip wird zu: Für jede Menge X , jedes $x \in X$ und jedes $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X \rightarrow X$ definiert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f(0) &= x && (f-0), \\ \forall_{n \in \mathbb{N}} f(1+n) &= \varphi(f(n)) && (f-S). \end{aligned}$$

genau eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

6. Verwenden Sie die Introduktions- und Eliminationsregeln für die logische Implikation

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} P \\ \vdots \\ Q \end{array}}}{P \implies Q} \Rightarrow \mathcal{I} \qquad \frac{P \implies Q \quad P}{Q} \Rightarrow \mathcal{E}$$

um die Allgemeingültigkeit der folgenden minimallogischen Aussagen zu beweisen:

- (a) $B \implies (A \implies B)$;

Lösung: Annahme: B w Zu zeigen: $A \implies B$.

Zusätzliche Annahme: A

Nur noch zu zeigen B .

B ist bereits eine Annahme, und somit sind wir fertig. Die zusätzliche Annahme haben wir nicht benötigt.

- (b) $(A \implies B) \implies C \implies (A \implies C)$;

Lösung: Nicht allgemeingültig.

- (c) $(A \implies C) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C))$;

Lösung: Dies ist ein Spezialfall von 6a

- (d) $(A \implies (B \implies C)) \implies (B \implies (A \implies C))$;

Lösung: Wir verwenden die Introduktionsregel:

Annahme: $A \implies (B \implies C)$.

Zu zeigen: $B \implies (A \implies C)$.

Wir verwenden erneut die Introduktionsregel:

Zusätzliche Annahme: B

Nur noch zu zeigen: $A \implies C$.

Wir verwenden die Introduktionsregel ein drittes Mal:

Weitere Annahme: A .

Jetzt nur noch zu zeigen C .

Da unser Beweisziel keine Implikation mehr ist, verwenden wir keine Introduktionsregel mehr. Stattdessen versuchen wir eine der Annahmen zu verwerten, indem wir auf eine solche eine Eliminationsregel anwenden.

Wir wenden die Eliminationsregel auf $A \implies (B \implies C)$ an, unsere erste Annahme an. Weil auch A eine Annahme ist, schließen wir somit auf $B \implies C$.

Daraus schließen wir nun, wiederum mittels Eliminationsregel, auf C , da B eine Annahme ist. Damit ist unser Beweisziel erreicht.

(e) $(B \implies C) \implies ((A \implies B) \implies (A \implies C));$

Lösung: Wir verwenden die Introduktionsregel:

Annahme: $B \implies C$

Zu zeigen: $(A \implies B) \implies (A \implies C)$.

Wir verwenden erneut die Introduktionsregel:

Zusätzliche Annahme: $A \implies B$

Nur noch zu zeigen: $A \implies C$.

Wir verwenden die Introduktionsregel ein drittes Mal:

Weitere Annahme: A .

Jetzt nur noch zu zeigen C .

Da unser Beweisziel keine Implikation mehr ist, verwenden wir keine Introduktionsregel mehr. Stattdessen versuchen wir eine der Annahmen zu verwerten, indem wir auf eine solche eine Eliminationsregel anwenden. Dabei sind jene Annahmen interessant, deren Konklusion unserem aktuellen Beweisziel entspricht.

Wir wenden die Eliminationsregel auf $B \implies C$, unsere erste Annahme an. Dadurch schließen wir: um unser Beweisziel C zu erreichen, reicht es B zu beweisen.

Hier bietet sich die zusätzliche Annahme an, wofür wir wieder eine Eliminationsregel verwenden:

Es reicht, A zu zeigen.

Da A eine unserer aktuellen Annahme ist, sind wir fertig.

(f) $P \implies ((P \implies Q) \implies Q).$

(g) $((P \implies Q) \implies Q) \implies P.$

Lösung: Introdution führt zu:

Annahme: $((P \implies Q) \implies Q) \implies Q$.

Zu zeigen: P .

Und wir haben absolut keine Idee wie man hier weiterschließen könnte.

Tatsächlich ist diese Aussage nicht allgemeingültig.

$$(h) \quad (P \implies Q) \implies (P \implies R) \implies (Q \implies R \implies T) \implies (P \implies T).$$

Lösung: Introdution liefert:

Annahme: $(P \implies Q)$

Zu zeigen: $(P \implies R) \implies (Q \implies R \implies T) \implies (P \implies T)$.

Erneute Introdution liefert:

Zusätzliche Annahme: $P \implies R$:

Nur noch zu zeigen: $(Q \implies R \implies T) \implies (P \implies T)$

Erneute Introdution liefert:

Dritte Annahme: $(Q \implies R \implies T)$

Nur noch zu zeigen: $(P \implies T)$

Erneute Introdution liefert:

Vierte Annahme: P

Schließlich nur noch zu zeigen: T .

Aus P und $P \implies Q$ schließen wir mittels Elimination auf Q .

Aus P und $P \implies R$ schließen wir mittels Elimination auf R .

Aus Q und $Q \implies R \implies T$ schließen wir mittels Elimination zuerst auf $R \implies T$, und daraus und aus R mittels einer erneuten Elimination auf T .

$$(i) \quad \left(\left(\left((P \implies Q) \implies P \right) \implies P \right) \implies Q \right) \implies Q.$$

Lösung: Introdution führt zu:

Annahme: $\left(\left((P \implies Q) \implies P \right) \implies P \right) \implies Q$

Zu zeigen: Q .

Hier ist bereits keine Introdution mehr anwendbar. Elimination liefert aber:

Es reicht zu zeigen: $\left((P \implies Q) \implies P \right) \implies P$

Jetzt ist wieder Introdution anwendbar:

Zusätzliche Annahme: $(P \implies Q) \implies P$

Zu zeigen: P .

Hier ist wieder Elimination möglich, da die zusätzliche Annahme besagt:

Es reicht zu zeigen: $P \implies Q$.

Introdution:

Dritte Annahme: P

Zu zeigen: Q .

Hier versuchen wir es erneut mit der ersten Annahme, da nur diese Q liefert kann. Elimination liefert hier:

Es reicht nun zu zeigen: $((P \implies Q) \implies P) \implies P$.

Introduktion:

Letzte Annahme: $(P \implies Q) \implies P$

Zu zeigen: P .

Wir benötigen die letzte Annahme nicht mehr, da P bereits die dritte Annahme ist.

Anmerkung: Ein Ausdruck wie $A \implies B \implies C$ ist stets wie $A \implies (B \implies C)$ zu verstehen.

7. Installieren Sie auf einem passenden Computer die Mathematik-Software SAGE, frei erhältlich auf <http://www.sagemath.org>. Unter einem Unix-ähnlichen System sollte die Installation keine Schwierigkeiten bereiten, mittels VMware (es reicht der gratis verfügbare Player) sollte es jedoch auch unter anderen Betriebssystemen problemlos funktionieren. Eine Anleitung für Windows-Betriebssysteme finden Sie unter http://www.sagemath.org/bin/microsoft_windows/README.txt. Sie benötigen ca 2,5 GB freien Platz auf der Festplatte. Obwohl SAGE selbst in einer virtuellen Maschine läuft, ist es via Web-Browser vom normalen System aus benutzbar.

Konkrete Fragen zu den Übungsbeispielen dürfen durchaus im KUSSS-Forum zu dieser Lehrveranstaltung diskutiert werden.