

Mathematik und Logik

2. Übungsaufgaben

bis 2008-10-21, Lösungen

1. Definieren Sie Länge einer Liste mittels Rekursion „von hinten“.

Berechnen Sie dann mit dieser Rekursion $|abc|$.

Lösung:

$$\begin{aligned}|\epsilon| &= 0 \\ |u\alpha| &= 1 + |u|\end{aligned}$$

Bsp.: $|abc| = |(((\epsilon a)b)c| = 1 + |(\epsilon a)b| = 1 + 1 + |\epsilon a| = 1 + 1 + 1 + |\epsilon| = 1 + 1 + 1 + 0 = 3$.

2. Definieren Sie die Operation „prepend“ (vorne Einfügen) mittels Rekursion „von hinten“, also via „append“.

Rechnen Sie auch dazu ein kleines Beispiel.

Lösung:

$$\begin{aligned}\alpha\epsilon &= \epsilon\alpha \\ \alpha(v\beta) &= (\alpha v)\beta\end{aligned}$$

Bsp.: $x(abc) = x(((\epsilon a)b)c) = (x((\epsilon a)b))c = ((x(\epsilon a))b)c = (((x\epsilon)a)b)c = (((\epsilon x)a)b)c = xabc$.

3. Beweisen Sie (mittels Listen-Induktion)

$$\forall_{u,v \in \Sigma^*} \widetilde{uv} = \widetilde{vu}$$

Lösung:

- IA: Es gilt $\widetilde{\epsilon v} = \widetilde{v} = \widetilde{v\epsilon} = \widetilde{v\epsilon}$;

- IS mit IH $\widetilde{uv} = \widetilde{vu}$:
 Zu zeigen: $(\alpha u)v = \widetilde{v\alpha u}$
 Wir formen um: $(\alpha u)v = \widetilde{\alpha(uv)} = \widetilde{uv\alpha} = (\widetilde{vu})\alpha = \widetilde{v(\widetilde{u\alpha})} = \widetilde{v\alpha u}$.

4. Beweisen Sie (mittels Listen-Induktion)

$$\forall_{u,v \in \Sigma^*} |uv| = |u| |v|$$

5. Zeigen Sie, daß jedes Palindrom in zwei bis auf Spiegelung gleiche Teile zerfällt; genauer:

$$\forall_{\substack{w \in \Sigma^* \\ \text{PD}(w)}} \exists_{u \in \Sigma^*} \left(w = u\widetilde{u} \vee \exists_{\alpha \in \Sigma} w = u\alpha\widetilde{u} \right)$$

Anmerkung:

Eine Aussage der Form $\exists_{x \in X} P(x)$, ist dabei zu lesen als: „Es gibt ein x vom Typ X , sodaß $P(x)$ gilt.“ Oder: „Man kann ein x vom Typ X so konstruieren, daß $P(x)$ erfüllt ist.“ Oder „Es existiert ein $x \dots$ “ Das Zeichen \vee ist als „oder“ zu lesen, und bedeutet, daß zumindest eine der beiden damit verbundenen Aussagen wahr sein (oder bewiesen werden) sollte.

Versuchen Sie zuerst, die Behauptung anhand von ein paar Beispielen zu bestätigen.

Versuchen Sie dann, die Behauptung mittels $\text{PD}(w) \iff w = \widetilde{w}$ zu folgern.

Wenn Ihnen das nicht gut gelingt, verwenden Sie das Induktionsschema, welches wir im Zusammenhang mit induktiven Definition von PD kennengelernt haben.

Lösung: Die Aussage $\exists_{u \in \Sigma^*} \left(w = u\widetilde{u} \vee \exists_{\alpha \in \Sigma} w = u\alpha\widetilde{u} \right)$ bezeichnen wir mit $P(w)$. Wir zeigen dann:

- $P(\epsilon)$;
- $\forall_{\beta \in \Sigma} P(\beta)$;
- $\forall_{\beta \in \Sigma} \forall_{w \in \Sigma^*} (P(w) \implies P(\beta w \beta))$.

Gemäß der induktiven Definition von PD gilt dann $\forall_{\substack{w \in \Sigma^* \\ \text{PD}(w)}} P(w)$.

Im Detail:

$$(a) \text{ Z.z.: } \exists u \in \Sigma^* \left(\epsilon = u\tilde{u} \vee \exists \alpha \in \Sigma \epsilon = u\alpha\tilde{u} \right)$$

Wir wählen $u = \epsilon$, und damit ist der linke Teil erfüllt.

$$(b) \text{ Sei } \beta \in \Sigma. \text{ Z.z.: } \exists u \in \Sigma^* \left(\beta = u\tilde{u} \vee \exists \alpha \in \Sigma \beta = u\alpha\tilde{u} \right)$$

Wir wählen $u = \epsilon$ und $\alpha = \beta$, und damit ist der rechte Teil erfüllt.

$$(c) \text{ Sei } \beta \in \Sigma, w \in \Sigma^*, \text{ mit IH } \exists u \in \Sigma^* \left(w = u\tilde{u} \vee \exists \alpha \in \Sigma w = u\alpha\tilde{u} \right)$$

$$\text{Z.z.: } \exists u \in \Sigma^* \left(\beta w \beta = u\tilde{u} \vee \exists \alpha \in \Sigma \beta w \beta = u\alpha\tilde{u} \right)$$

Wegen der IH können wir annehmen, daß es ein $u_0 \in \Sigma^*$ gibt, welches zumindest eine der beiden Bedingungen erfüllt. Wir zeigen die Behauptung für jeden der beiden Fälle:

- Es gelte: $w = u_0\tilde{u}_0$.
Dann gilt auch: $\beta w \beta = \beta u_0\tilde{u}_0\beta = (\beta u_0)\tilde{\beta u_0}$. Wir wählen also $u = \beta u_0$, und damit ist der linke Teil erfüllt.
- Es gelte: $\exists \alpha \in \Sigma w = u_0\alpha\tilde{u}_0$. Wir nehmen daher an, daß es ein α_0 gibt, sodaß $w = u_0\alpha_0\tilde{u}_0$. Es gilt dann: $\beta w \beta = \beta u_0\alpha_0\tilde{u}_0\beta = (\beta u_0)\alpha_0\tilde{\beta u_0}$. Wir wählen daher $u = \beta u_0$, und mit $\alpha = \alpha_0$ gilt dann der rechte Teil.

6. Sei $c \in \Sigma$. Wir definieren induktiv die Eigenschaft E_c mittels der beiden Regeln:

$$\frac{w \in \Sigma^*}{E_c(cw)} \quad \frac{w \in \Sigma^* \quad E_c(w) \quad \alpha \in \Sigma}{E_c(\alpha w)}$$

Möglicherweise einfacher zu lesen (und gleichbedeutend dazu) sind die beiden Axiome:

$$\forall_{w \in \Sigma^*} E_c(cw) \quad \forall_{w \in \Sigma^*} \forall_{\alpha \in \Sigma} E_c(\alpha w)$$

Finden Sie Beispiele von Listen, welche diese Eigenschaft haben; und auch solche, die sie nicht haben.

Mit welchem Induktionsprinzip lassen sich Aussagen über alle Listen, welche die Eigenschaft E_c haben, beweisen?

Lösung: Das zugehörige Induktionsprinzip lautet

$$\frac{\forall_{w \in \Sigma^*} P(cw) \quad \forall_{w \in \Sigma^*} \forall_{\alpha \in \Sigma} P(\alpha w)}{\forall_{w \in \Sigma^*} P(w)} \quad \frac{}{E_c(w)}$$

7. Dieses Beispiel sollten Sie erst probieren, wenn Sie sich ausreichend intensiv mit dem Beispiel 6 auseinandergesetzt haben. Danach vergleichen Sie mit

$$\frac{\forall_{w \in \Sigma^*} P(cw) \quad \forall_{w \in \Sigma^*} \forall_{\alpha \in \Sigma} \frac{P(\alpha w)}{P(w)}}{\forall_{w \in \Sigma^*} \frac{P(w)}{E_c(w)}}$$

und beweisen damit die Aussage

$$\forall_{w \in \Sigma^*} \exists_{u, v \in \Sigma^*} w = ucw$$

Lösung: Wir beweisen gemäß der induktiven Definition von E_c . Wenn wir die Aussage $\exists_{u, v \in \Sigma^*} w = ucw$ mit $P(w)$ bezeichnen, haben somit zu zeigen:

- (a) $\forall_{w \in \Sigma^*} P(cw)$.
 (b) $\forall_{w \in \Sigma^*} \frac{P(\alpha w)}{P(w)}$.

Gemäß Induktionsprinzip gilt $P(w)$ dann für alle Listen, welche die Eigenschaft P_c haben.

- (a) Sei $w \in \Sigma^*$. Z.z. $\exists_{u, v \in \Sigma^*} cw = ucw$.
 Wir wählen $u = \epsilon$ und $v = w$.
 (b) Es gelte die IH: $\exists_{u, v \in \Sigma^*} w = ucw$.
 Sei weiters $\alpha \in \Sigma$. Dann ist z.z.: $\exists_{u, v \in \Sigma^*} \alpha w = ucw$.
 Gemäß IH können wir die Existenz von $u_0, v_0 \in \Sigma^*$ voraussetzen, sodaß $w = u_0 c v_0$. Es gilt dann

$$\alpha w = \alpha(u_0 c v_0) = (\alpha u_0) c v_0$$

Wir wählen daher $u = \alpha u_0$ und $v = v_0$.

8. Definieren Sie mittels Listenrekursion ein Funktion $t : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, welche

$$\forall_{\alpha \in \Sigma} \forall_{u \in \Sigma^*} t(\alpha u) = u$$

erfüllt.

Lösung: Wir haben die Werte für $t(\epsilon)$ und $t(\alpha u)$ festzulegen. Letztere ergibt sich sofort aus der Angabe. Den Wert für $t(\epsilon)$ dagegen können wir beliebig

festlegen; es muß lediglich $t(\epsilon) \in \Sigma^*$ sein. Die leere Liste bietet sich hier besonders an. Also:

$$\begin{aligned}t(\epsilon) &= \epsilon \\t(\alpha u) &= u\end{aligned}$$

Man beachte, daß hier gar keine echte Rekursion vorliegt (denn $t(u)$ kommt gar nicht vor), sondern nur eine Fallunterscheidung.

9. Warum genau kann es nicht sein, daß $\epsilon = \alpha u$, für passendes $\alpha \in \Sigma$ und $u \in \Sigma^*$?

Lösung: Seien \perp und \top zwei Elemente einer beliebigen Menge. Dann können wir mit Rekursion eine Funktion definieren, die

$$\begin{aligned}k(\epsilon) &= \perp \\k(\alpha u) &= \top\end{aligned}$$

erfüllt. Wenn nun $\epsilon = \alpha u$, dann wäre wegen der Wohldefiniertheit von k auch $k(\epsilon) = k(\alpha u)$, was aber $\perp = \top$ zur Folge hätte. Das heißt dann aber, daß alle Elemente einer beliebigen Menge gleich wären, z.B. $0 = 1$, oder daß alle Aussagen logisch äquivalent seien. Wäre also $\epsilon = \alpha u$ wahr, hätte dies allen Unsinn der Welt zufolge, was mit üblicherweise so ausdrückt, daß man sagt, die Aussage $\epsilon = \alpha u$ ist falsch.

10. Ein Liste u heißt ein *Präfix* einer Liste w , wenn es eine Liste v gibt, sodaß $w = uv$. Definieren Sie ein Funktion, welche die Liste aller Präfixe einer Liste bestimmt.

Tip: Rechnen Sie zuerst ein paar Beispiele (für sehr kurze Listen) händisch durch.

Lösung: Die leere Liste ist ein Präfix von jeder Liste, auch der leeren Liste.

Die Liste aller Präfixe einer leeren Liste ist einfach zu bestimmen: es handelt sich um die Liste mit einem Element, der leeren Liste.

Sind dagegen p_1, p_2, p_3, \dots die Präfixe einer Liste w , dann sind $\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha p_3$ Präfixe von αw .

Zusammenfassend läßt sich somit eine Funktion $\text{prefixes} : \Sigma^* \rightarrow (\Sigma^*)^*$ definieren durch:

$$\begin{aligned}\text{prefixes}(\epsilon) &= [\epsilon] \\ \text{prefixes}(\alpha u) &= \epsilon, \text{prependall}_\alpha(\text{prefixes}(u))\end{aligned}$$

wobei wir die Hilfsfunktion $\text{prependall} : \Sigma \rightarrow (\Sigma^*)^* \rightarrow (\Sigma^*)^*$ definieren durch

$$\begin{aligned}\text{prependall}_\alpha([\] &= [\alpha] \\ \text{prependall}_\alpha(uL) &= \alpha u, \text{prependall}_\alpha(L)\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}\text{prefixes}(abc) &= \epsilon, \text{prependall}_a(\text{prefixes}(bc)) \\ &= \epsilon, \text{prependall}_a(\epsilon, \text{prependall}_b(\text{prefixes}(c))) \\ &= \epsilon, \text{prependall}_a(\epsilon, \text{prependall}_b(\epsilon, \text{prependall}_c(\text{prefixes}(\epsilon)))) \\ &= \epsilon, \text{prependall}_a(\epsilon, \text{prependall}_b(\epsilon, \text{prependall}_c([\epsilon]))) \\ &= \epsilon, \text{prependall}_a(\epsilon, \text{prependall}_b([\epsilon, c])) \\ &= \epsilon, \text{prependall}_a([\epsilon, b, bc]) \\ &= \epsilon, [a, ab, abc] \\ &= [\epsilon, a, ab, abc].\end{aligned}$$