Mathematik und Logik

1. Übungsaufgaben

bis 2008-10-14, Lösungen

1. Bestimmen Sie, genau so wie wir es für die Länge gemacht haben, den Wert von $f(abcc)$, wobei f durch (f-nil) und (f-pre) definiert sei.

2. $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sei definiert durch

$$a \underset{u}{\varphi} b = a + b.$$

   Berechnen Sie für die mit diesem φ rekursiv definierte Funktion $f = \overleftarrow{\varphi} 0$ (also $f(\epsilon) = 0$, $f(au) = a + f(u)$) die Funktionswerte $f(3, 5, 7)$, $f(2)$, $f(\epsilon)$, $f(2, 1, 0, 0, 0, 9, 1, 3, 5, 7)$. (Hier wurde zur Trennung der Listenelemente ein Beistrich verwendet, d.h. z.B. 3,5,7 bezeichnet eine Liste aus drei Zahlen.) Interpretieren Sie f inhaltlich. Welches Symbol verwendet man dafür häufig?

   Lösung: Es ist z.B. $f(3, 5, 7) = 3 + (5 + (7 + 0))$.
   f berechnet somit die Summe aller Listenelemente. $f(u) = \sum u$.

3. Sei $\varphi : \Sigma \to \Sigma^* \to \Sigma^* \to \Sigma^*$ definiert durch

$$\alpha \underset{u}{\varphi} v = v\alpha.$$

   Berechnen Sie $abc \overleftarrow{\varphi} \epsilon$ und interpretieren Sie den Zusammenhang mit einer bekannten Funktion.

   Lösung: $abc \overleftarrow{\varphi} \epsilon = a \underset{bc}{\varphi} (b \underset{c}{\varphi} (c \underset{\epsilon}{\varphi} \epsilon)) = ((\epsilon c)b)a = cba.$

4. Setzen Sie in $|u\beta| = 1+|u| \implies |(\alpha u)\beta| = 1+|\alpha u|$ für u der Reihe nach die Listen ϵ, $a\epsilon$, $ab\epsilon$ ein und beweisen die entsprechenden Aussagen. Schließen Sie daraus, daß $|w\beta| = 1 + |w|$ für $w = \epsilon$, $w = a\epsilon$, und $w = ab\epsilon$ gilt. Vergleichen Sie diese Erfahrung mit dem entsprechenden Induktionsbeweis.

5. Beweisen Sie

$$\underset{u\in\Sigma^*}{\forall}\ \tilde{\tilde{u}} = u.$$

Lösung:

Beweis. $\tilde{\tilde{\epsilon}} = \tilde{\epsilon} = \epsilon$;
$\widetilde{\widetilde{\alpha u}} = \widetilde{\tilde{u}\alpha} = \alpha\tilde{\tilde{u}}$. $\square$

6. Beweisen Sie

$$\underset{u\in\Sigma^*}{\forall}\ |\tilde{u}| = |u|\,.$$

Lösung:

Beweis. $|\tilde{\epsilon}| = |\epsilon|$;
$|\widetilde{\alpha u}| = |\tilde{u}\alpha| = 1 + |\tilde{u}| = 1 + |u| = |\alpha u|$. $\square$

7. Sei $\alpha \in \Sigma$ und P irgendeine Eigenschaft für Listen. Beweisen Sie

$$\underset{u\in\Sigma^*}{\forall}\ P(u) \implies \underset{u\in\Sigma^*}{\forall}\ P(\alpha u).$$

8. Finden Sie eine Eigenschaft, für die die Umkehrung im vorigen Beispiel nicht gilt. Worin besteht hier der wesentliche Unterschied zu dem ähnlichen Satz aus der Vorlesung (mit Spiegelung)?

Lösung: $P(u) :\iff u \neq \epsilon$.

Es gilt $\tilde{\tilde{u}} = u$, aber nicht $\alpha(\alpha u) = u$.

9. Finden Sie weiters eine Eigenschaft, für die

$$\underset{u\in\Sigma^*}{\forall}\ P(u) \implies P(\alpha u)$$

nicht gilt.

Lösung: $P(u) :\iff u = \epsilon$

10. Definieren Sie rekursiv eine Funktion q, welche alle Elemente einer Liste von Zahlen quadriert, z.B.

$$q(3, 1, 2, 5) = 9, 1, 4, 25.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} q(\epsilon) &= \epsilon \\ q(\alpha u) &= \alpha^2, q(u). \end{aligned}$$

(Wir verwenden hier den Beistrich, damit es keine Verwechslung mit der Multiplikation von Zahlen gibt.)

11. Definieren Sie rekursiv eine Funktion d welche zu einer Liste von Ziffern die dadurch bezeichnete Dezimalzahl berechnet (Einerstelle vorne), z.B.

$$e(3,1,2,5) = 5213.$$

Lösung: $d(\epsilon) = 0$, $d(\alpha, u) = \alpha + 10d(u)$.

12. Wir hätten noch gerne eine Funktion e, die ähnliches leistet wie d, aber mit der Einerstelle hinten, also z.B.

$$e(3,1,2,5) = 3125.$$

Wie geht das am einfachsten?

Lösung: $e(u) = d(\widetilde{u})$.

Alternativ könnten wir definieren: $e(\epsilon) = 0$, $e(u\alpha) = 10e(u) + \alpha$; dazu brauchen wir aber die Rekursion von der anderen Seite.

Man beachte, daß mit $e(\alpha u) = 10\alpha + e(u)$ etwas ganz anderes berechnen würde.