Mathematik und Logik

8. Übungsaufgaben

bis 2008-12-09, Angaben

1. Zeigen Sie, daß $A \times (B \times C)$ stets gleichmächtig zu $(A \times B) \times C$ ist.
2. Es sei P die Menge, welche aus allen Polynomen in x mit rationalen Koeffizienten besteht, also:

   $$P = \{\, a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N},\, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q} \,\}$$

   Ist P gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ oder zu $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$?
3. Ist $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}^{\mathbb{B}}$?
4. Ist $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ gleichmächtig zu $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$?
5. Rechnen Sie $(243)_b$ ins Dezimalsystem um, für die Basis b:
   (a) $b = 5$;
   (b) $b = 8$;
   (c) $b = 10$;
   (d) $b = 12$;
   (e) $b = 16$;
   (f) $b = 60$.
6. Rechnen Sie umgekehrt die Zahl 243 (Dezimalsystem) in jede der Basen aus Beispiel **??** um. Und außerdem für $b = 2$.

   Berechnen Sie $243 \cdot 31$ für die Basen 5 und 12, sowie $101110 \cdot 1011$ in Basis 2.
7. Welche Darstellung hat $\frac{1}{3}$ in den verschiedenen Stellenwertsystemen?
8. Beweisen Sie, daß die b-adische Darstellung eindeutig ist.
9. Beweisen Sie, daß 0 dann und nur dann eine Zahl teilt, wenn diese ebenfalls 0 ist, d.h.

   $$0 \mid a \iff a = 0.$$
10. Finden Sie alle Teiler von 32 und alle Teiler von 20. Bestimmen Sie daraus alle gemeinsamen Teiler von 32 und 20. Gibt es darin einen, der ein Vielfaches von jedem anderen gemeinsamen Teiler ist?

11. Gehen Sie den Beweis des Euklidschen Algorithmus genau durch, und setzen Sie dabei für m und n der Reihe nach konkret die folgenden Zahlen ein:

    (a) $m = 3$, $n = 0$;
    (b) $m = 6$, $n = 3$;
    (c) $m = 27$, $n = 6$;
    (d) $m = 60$, $n = 27$;
    (e) $m = 87$, $n = 60$;
    (f) $m = 60$, $n = 87$.

    Beachten Sie dabei besonders, wie das Ergebnis der jeweils vorigen Rechnung Verwendung findet.

12. Finden Sie den größten gemeinsamen Teiler d von m und n mittels Euklidschem Algorithmus:

    (a) $m = 32$ und $n = 20$;
    (b) $m = 96$ und $n = 156$.
    (c) $m = 1024$ und $n = 817$.