# Mathematik und Logik

## 7. Übungsaufgaben

## bis 2008-12-02, Angaben

1. Beweisen Sie
$$(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \iff (A \wedge B \Rightarrow C)$$
und definieren Sie einen passenden Term, also ein Paar $(f, g)$ von Funktionen mit
$$f : (A \to B \to C) \to (A \times B \to C)$$
$$g : (A \times B \to C) \to (A \to B \to C)$$

2. Beweisen Sie
$$(A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C) \implies (A \wedge B \Rightarrow C)$$
und definieren Sie eine Funktion vom Typ
$$f : (A \to C) + (B \to C) \to (A \times B \to C).$$
Können Sie auch eine Funktin vom Typ
$$g : (A \times B \to C) \to (A \to C) + (B \to C)$$
definieren?

3. Wir definieren eine Menge $Z$ durch die Regeln.
$$\frac{a \in \mathbb{N} \qquad b \in \mathbb{N}}{a - b \in Z} Z\mathcal{I} \qquad\qquad \frac{\underset{a\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{b\in\mathbb{N}}{\forall} P(a-b)}{\underset{z\in Z}{\forall} P(z)} Z\mathcal{E}$$
$Z$ besteht somit aus Paaren natürlicher Zahlen. Allerdings verwenden wir statt $(a, b)$ die Notation $a-b$, um anzuzeigen, daß damit nicht ein Element von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, sondern ein Element von $Z$ konstruiert werden soll (darüberhinaus hat das Minuszeichen keine Bedeutung, es ist einfach ein Konstruktor, d.h. insbesondere, daß *nicht* die Differenz von $a$ und $b$ gebildet wird). Es sollte aber noch einen wichtigen Unterschied zur Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ geben: Wir betrachten $a - b$ und $c - d$ nicht nur dann als gleich, wenn $a = c$ und $b = d$ ist, sondern es sollte für jedes $x \in \mathbb{N}$ auch $a - b = (a + x) - (b + x)$ sein. Es läßt sich zeigen, daß dann
$$a - b = c - d \iff a + d = b + c.$$

(Können Sie dies auch beweisen?) Beachten Sie hier insbesonere, daß das Gleichheitszeichen links die Gleichheit von Elementen von $Z$ betrifft, während rechts die Gleichheit natürlicher Zahlen gemeint ist.

Wir definieren nun eine Addition für Elemente von $Z$:

$$(a-b)+(c-d) := (a+c)-(b+c).$$

Beachten Sie dabei besonders, daß die Minus- und Pluszeichen auf den beiden Seiten verschiedene Bedeutungen haben. (Welche genau?)

Diese Addition in $Z$ wurde abhängig von der Darstellung definiert. Zeigen Sie, daß sie trotzdem wohldefiniert ist, d.h.

$$\underset{y,z\in Z}{\forall}\ \underset{y',z'\in Z}{\forall} y=y' \ \wedge \ z=z' \Rightarrow y+z=y'+z'$$

Überlegen Sie sich, was eigentlich diese hier definierte Menge $Z$ mit der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen zu tun hat.

4. Beweisen Sie (falls möglich)

$$\left(\underset{x\in X}{\exists} P(x)\right) \Rightarrow A \iff \left(\underset{x\in X}{\forall} P(x) \Rightarrow A\right)$$

sowie

$$\left(\underset{x\in X}{\forall} P(x)\right) \Rightarrow A \iff \left(\underset{x\in X}{\exists} P(x) \Rightarrow A\right)$$

und konstuieren Sie zumindest für eine Richtung einen passenden Term.

5. Für jedes $x \in X$ sei $P(x)$ eine Aussage. Zeigen Sie, daß es eine Aussage $E$ gibt, sodaß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\underset{x\in X}{\forall} P(x) \Rightarrow E$$
$$\underset{F\in\mathbb{P}}{\forall} \left(\underset{x\in X}{\forall} P(x) \Rightarrow F\right) \Rightarrow (E \Rightarrow F)$$

6. Rechnen Sie im Detail nach, daß $\subseteq$ für Eigenschaften transitiv ist, daß also für beliebiege Eigenschaften $A, B, C : X \to \mathbb{P}$ gilt:

$$A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C.$$

*Anmerkung:* Wir hatten definiert:

$$A \subseteq B \iff \underset{x\in X}{\forall} A(x) \Rightarrow B(x).$$

7. Für Eigenschaften $A, B : X \to \mathbb{P}$ sollte die Eigenschaft $A \cup B : X \to \mathbb{P}$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$A \subseteq A\cup B \ \wedge \ B \subseteq A \cup B$$
$$\underset{C:X\to\mathbb{P}}{\forall} A \subseteq C \ \wedge \ B \subseteq C \Rightarrow A\cup B \subseteq C$$

Zeigen Sie detailliert, daß die durch

$$(A \cup B)(x) \iff \underset{x \in X}{\forall} A(x) \vee B(x)$$

definierte Eigenschaft tatsächlich diese Bedingungen erfüllt.

8. Bekanntlich gilt $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ (für logische Aussagen). Definieren Sie daher für beliebige Mengen $A, B, C$, eine Funktion

$$f : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$$

und auch eine Funktion für die Umkehrung, also

$$g : A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$$

Wie verhalten sich $f$ und $g$ zueinander? Überlegen Sie sich, inwieweit es sinnvoll sein könnte, die Mengen $A \times (B \times C)$ und $(A \times B) \times C$ als gleich zu betrachten.

9. Beim sehr gut besuchten Kathreinstanz gibt es eine Menge $M$ von Männern und eine Menge $F$ von Frauen. Wie kann man am einfachsten feststellen, ob $M$ und $F$ gleichviele Elemente enthalten?