

# Mathematik und Logik

## 6. Übungsaufgaben

bis 2008-11-18, Angaben

1. Seien  $d, a, b \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt:

$$d \mid a \wedge d \mid b \implies d \mid ab \wedge d \mid (a - b).$$

Formulieren Sie diesen Satz formal mit Quantoren und beweisen Sie ihn. Achten Sie dabei besonders darauf, welche Schlußregeln jeweils verwendet werden. Achten Sie insbesondere auf die korrekte Verwendung der Definition:

$$a \mid b \iff \exists_{q \in \mathbb{Z}} b = q \cdot a.$$

2. Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\left( \forall_{x \in X} \forall_{y \in Y} A(x) \vee B(y) \right) \implies \left( \forall_{x \in X} A(x) \right) \vee \left( \forall_{y \in Y} B(y) \right)$$

3. Welche der beiden Richtungen in

$$\overline{\forall_{x \in X} A(x)} \iff \exists_{x \in X} \overline{A(x)}$$

können Sie beweisen?

4. Für beliebige Mengen  $A, B, C$ , definieren Sie eine Funktion vom Typ

$$f : (A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow A \rightarrow C).$$

5. Für beliebigen Mengen  $A$  und  $B$  definieren Sie eine Funktion vom Typ

$$h : (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B).$$

6. Zeigen Sie:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} m > n.$$

Was passiert hier, wenn man die Reihenfolge der Quantoren vertauscht?

Was läßt sich allgemein über die Beziehung von Aussagen der Form

$$\forall_{x \in X} \exists_{y \in Y} P(x, y) \quad \text{und} \quad \exists_{y \in Y} \forall_{x \in X} P(x, y)$$

zueinander sagen?

7. Zeigen Sie:

$$\left( \exists_{x \in X} A(x) \implies B \right) \implies \left( \forall_{x \in X} A(x) \right) \implies B$$

8. Übungen zu SAGE folgen in einem eigenen Übungs-Worksheet: <http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/Win/ml08w/exc/e6.sws>.