Mathematatik und Logik

5. Übungsaufgaben

bis 2008-11-11, Angaben

1. Geben Sie (mindestens) ein konkretes Gegenbeispiel zum Assoziativgesetz für die logische Implikation an, d.h., suchen Sie konkrete Aussagen A, B, C, sodaß

$$\big(A \implies (B \implies C)\big) \implies \big((A \implies B) \implies C\big)$$

   NICHT gilt!

2. Beweisen Sie ein paar triviale Sätze über die Disjunktion:

   (a) $A \implies A \vee B$;

   (b) $A \wedge B \implies A \vee B$;

   (c) $A \vee B \iff B \vee A$;

   (d) $A \iff A \vee A$;

   (e) $A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$.

3. Beweisen Sie

$$(A \implies B) \vee (C \implies D) \implies (A \vee C \implies B \vee D).$$

4. Mit $\perp$ bezeichnen wir die Aussage "Jede Aussage ist wahr". (Dies bedeutet, daß $\perp \implies P$ allgemeingültig ist.) Ferner verwenden wir die Abkürzung $\overline{A}$ anstelle von $(A \implies \perp)$. Zeigen Sie damit die Allgemeingültigkeit von

   (a) $\overline{A \wedge \overline{A}}$;

   (b) $A \implies \overline{\overline{A}}$;

   (c) $\overline{A} \wedge \overline{B} \implies (A \iff B)$.

   (d) $\overline{\overline{\overline{A}}} \implies \overline{A}$;

   (e) $(A \implies B) \implies (\overline{B} \implies \overline{A})$;

   (f) $A \vee \overline{A} \implies (\overline{\overline{A}} \implies A)$;

   In den meisten Fällen entpuppen sich diese Aussagen nach dem Einsetzen der Definition als Spezialfälle wohlbekannter allgemeingültiger aussagenlogischer Sätze.

   In welchen Fällen fand die Natur der Aussage $\perp$ tatsächlich eine Anwendung?

5. Starten Sie die Mathematik-Software SAGE und rechnen Sie damit ein paar einfache Beispiele mit Listen:

   (a) Definieren Sie `w = "Eine Zeichenkette"`

   (b) `len(w)` ergibt ihre Länge

   (c) Mehrere Zeichenketten lassen sich mit `+` verbinden .

   (d) `5*w` berechnet, was wir mit w^5 bezeichnet haben

   (e) Das erste Element einer nicht-leeren Liste erhält man mit `w[:1]`, den Rest mit `w[1:]`. Allgemein gilt stets `w == w[:i]+w[:i]`, auch für negative `i`.

   (f) Listen können in SAGE auch ganz anders aussehen. Testen Sie, so wie oben, z.B. auch für

   ```
   z = [3,4,7,7,1,7]
   ```

   oder für

   ```
   s = "alpha", "beta", "gamma"
   ```

   (g) Das Rekursionsprinzip aus der Vorlesung

   $$\begin{aligned} f(\epsilon) &= x \\ f(\alpha u) &= \alpha \underset{u}{\varphi} f(u) \end{aligned}$$

   wird von SAGE zwar nicht wörtlich verstanden, kann aber gemäß dem folgenden Schema dennoch leicht umgesetzt werden:

   ```
   def f(u):
     if len(u) == 0 :
       return x
     else :
       return φ(u[:1], u, f(u[1:]))
   ```

   Anmerkung: Die Einrückungen müssen eingehalten werden.

   (h) Definieren Sie die Funktion für das Spiegeln von Listen gemäß dem obigen Schema. Testen Sie diese Funktion dann insbesondere für `w`, `z` und `s` von oben.