Mathematik und Logik

2. Übungsaufgaben

bis 2008-10-21, Angaben

1. Definieren Sie Länge einer Liste mittels Rekursion „von hinten".

   Berechnen Sie dann mit dieser Rekursion $|abc|$.

2. Definieren Sie die Operation „prepend" (vorne Einfügen) mittels Rekursion „von hinten", also via „append".

   Rechnen Sie auch dazu ein kleines Beispiel.

3. Beweisen Sie (mittels Listen-Induktion)

$$\underset{u,v\in\Sigma^*}{\forall} \widetilde{uv} = \widetilde{v}\widetilde{u}$$

4. Beweisen Sie (mittels Listen-Induktion)

$$\underset{u,v\in\Sigma^*}{\forall} |uv| = |u|\,|v|$$

5. Zeigen Sie, daß jedes Palindrom in zwei bis auf Spiegelung gleiche Teile zerfällt; genauer:

$$\underset{\substack{w\in\Sigma^*\\ \mathrm{PD}(w)}}{\forall} \; \underset{u\in\Sigma^*}{\exists} \left(w = u\widetilde{u} \;\vee\; \underset{\alpha\in\Sigma}{\exists} w = u\alpha\widetilde{u} \right)$$

   Anmerkung:
   Eine Aussage der Form $\exists_{x\in X} P(x)$, ist dabei zu lesen als: „Es gibt ein x vom Typ X, sodaß $P(x)$ gilt." Oder: „Man kann ein x vom Typ X so konstuieren, daß P(x) erfüllt ist." Oder „Es existiert ein x …" Das Zeichen $\vee$ ist als „oder" zu lesen, und bedeutet, daß zumindest eine der beiden damit verbundenen Aussagen wahr sein (oder bewiesen werden) sollte.

   Versuchen Sie zuerst, die Behauptung anhand von ein paar Beispielen zu bestätigen.

Versuchen Sie dann, die Behauptung mittels $\mathrm{PD}(w) \iff w = \widetilde{w}$ zu folgern.

Wenn Ihnen das nicht gut gelingt, verwenden Sie das Induktionsschema, welches wir im Zusammenhang mit induktiven Definition von PD kennengelernt haben.

6. Sei $c \in \Sigma$. Wir definieren induktiv die Eigenschaft E_c mittels der beiden Regeln:

$$\frac{w \in \Sigma^*}{E_c(cw)} \qquad \frac{w \in \Sigma^* \quad E_c(w) \quad \alpha \in \Sigma}{E_c(\alpha w)}$$

Möglicherweise einfacher zu lesen (und gleichbedeutend dazu) sind die beiden Axiome:

$$\underset{w\in\Sigma^*}{\forall} E_c(cw) \qquad \underset{\substack{w\in\Sigma^* \\ E_c(w)}}{\forall}\ \underset{\alpha\in\Sigma}{\forall} E_c(\alpha w)$$

Finden Sie Beispiele von Listen, welche diese Eigenschaft haben; und auch solche, die sie nicht haben.

Mit welchem Induktionsprinzip lassen sich Aussagen über alle Listen, welche die Eigenschaft E_c haben, beweisen?

7. Dieses Beispiel sollten Sie erst probieren, wenn Sie sich ausreichend intensiv mit dem Beispiel 6 auseinandergesetzt haben. Danach vergleichen Sie mit

$$\frac{\underset{w\in\Sigma^*}{\forall} P(cw) \qquad \underset{\substack{w\in\Sigma^* \\ P(w)}}{\forall}\ \underset{\alpha\in\Sigma}{\forall} P(\alpha w)}{\underset{\substack{w\in\Sigma^* \\ E_c(w)}}{\forall} P(w)}$$

und beweisen damit die Aussage

$$\underset{\substack{w\in\Sigma^* \\ E_c(w)}}{\forall}\ \underset{u,v\in\Sigma^*}{\exists} w = ucv$$

8. Definieren Sie mittels Listenrekursion ein Funktion $t : \Sigma^* \to \Sigma^*$, welche

$$\underset{\alpha\in\Sigma}{\forall}\ \underset{u\in\Sigma^*}{\forall} t(\alpha u) = u$$

erfüllt.

9. Warum genau kann es nicht sein, daß $\varepsilon = \alpha u$, für passendes $\alpha \in \Sigma$ und $u \in \Sigma^*$?

10. Ein Liste u heißt ein *Präfix* einer Liste w, wenn es eine Liste v gibt, sodaß $w = uv$. Definieren Sie ein Funktion, welche die Liste aller Präfixe einer Liste bestimmt.

    Tip: Rechnen Sie zuerst ein paar Beispiele (für sehr kurze Listen) händisch durch.