Mathematik und Logik

1. Übungsaufgaben

bis 2008-10-14, Angaben

1. Bestimmen Sie, genau so wie wir es für die Länge gemacht haben, den Wert von $f(abcc)$, wobei f durch (f-nil) und (f-pre) definiert sei.

2. $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sei definiert durch

   $$a \underset{u}{\varphi} b = a + b.$$

   Berechnen Sie für die mit diesem φ rekursiv definierte Funktion $f = \overleftarrow{\varphi} 0$ (also $f(\epsilon) = 0$, $f(au) = a + f(u)$) die Funktionswerte $f(3, 5, 7)$, $f(2)$, $f(\epsilon)$, $f(2, 1, 0, 0, 0, 9, 1, 3, 5, 7)$. (Hier wurde zur Trennung der Listenelemente ein Beistrich verwendet, d.h. z.B. 3,5,7 bezeichnet eine Liste aus drei Zahlen.) Interpretieren Sie f inhaltlich. Welches Symbol verwendet man dafür häufig?

3. Sei $\varphi : \Sigma \to \Sigma^* \to \Sigma^* \to \Sigma^*$ definiert durch

   $$\alpha \underset{u}{\varphi} v = v\alpha.$$

   Berechnen Sie $abc \overleftarrow{\varphi}\, \epsilon$ und interpretieren Sie den Zusammenhang mit einer bekannten Funktion.

4. Setzen Sie in $|u\beta| = 1 + |u| \implies |(\alpha u)\beta| = 1 + |\alpha u|$ für u der Reihe nach die Listen ϵ, $a\epsilon$, $ab\epsilon$ ein und beweisen die entsprechenden Aussagen. Schließen Sie daraus, daß $|w\beta| = 1 + |w|$ für $w = \epsilon$, $w = a\epsilon$, und $w = ab\epsilon$ gilt. Vergleichen Sie diese Erfahrung mit dem entsprechenden Induktionsbeweis.

5. Beweisen Sie

   $$\underset{u \in \Sigma^*}{\forall} \widetilde{\widetilde{u}} = u.$$

6. Beweisen Sie

   $$\underset{u \in \Sigma^*}{\forall} |\widetilde{u}| = |u|\,.$$

7. Sei $\alpha \in \Sigma$ und P irgendeine Eigenschaft für Listen. Beweisen Sie

$$\underset{u \in \Sigma^*}{\forall} P(u) \implies \underset{u \in \Sigma^*}{\forall} P(\alpha u).$$

8. Finden Sie eine Eigenschaft, für die die Umkehrung im vorigen Beispiel nicht gilt. Worin besteht hier der wesentliche Unterschied zu dem ähnlichen Satz aus der Vorlesung (mit Spiegelung)?

9. Finden Sie weiters eine Eigenschaft, für die

$$\underset{u \in \Sigma^*}{\forall} P(u) \implies P(\alpha u)$$

nicht gilt.

10. Definieren Sie rekursiv eine Funktion q, welche alle Elemente einer Liste von Zahlen quadriert, z.B.

$$q(3, 1, 2, 5) = 9, 1, 4, 25.$$

11. Definieren Sie rekursiv eine Funktion d welche zu einer Liste von Ziffern die dadurch bezeichnete Dezimalzahl berechnet (Einerstelle vorne), z.B.

$$e(3, 1, 2, 5) = 5213.$$

12. Wir hätten noch gerne eine Funktion e, die ähnliches leistet wie d, aber mit der Einerstelle hinten, also z.B.

$$e(3, 1, 2, 5) = 3125.$$

Wie geht das am einfachsten?