Mathematik und Logik

7. Übungsaufgaben im 2007W

für 2007-11-27

$\mathbb{P}$ bezeichne die Menge aller Aussagen.

1. Zeigen Sie:
$$\underset{A \epsilon \mathbb{P}}{\forall} (\neg\neg\neg A \implies A).$$

2. Zeigen Sie
$$\underset{A \epsilon \mathbb{P}}{\forall} (A \vee \neg A) \iff \underset{A \epsilon \mathbb{P}}{\forall} (\neg\neg A \implies A).$$

3. Können Sie die Allgemeingültigkeit der Formel
$$((P \implies Q) \implies P) \implies P$$
nachweisen?

   Vereinfacht sich die Angelegenheit, wenn Sie
$$\underset{A \epsilon \mathbb{P}}{\forall} (A \vee \neg A)$$
verwenden?

4. Zeigen Sie, daß die Länge einer Liste ein Homomorphismus ist, d.h.
$$\underset{u,v \epsilon \Sigma^*}{\forall} |u \diamond v| = |u| + |v| \, .$$

5. Definieren Sie rekursiv eine Funktion $\triangleright \; \epsilon \; \Sigma^* \to \Sigma \to \Sigma^*$, welche an eine Liste hinten anfügt, z.B. $\langle 3,5,6 \rangle \triangleright 2 = \langle 3,5,6,2 \rangle$.

   Wie ist der Zusammenhang zwischen $\triangleright$ und $\diamond$?

   Vergessen Sie nicht, das Ergebnis anhand einfacher Beispiele zu testen.

6. Die Spiegelung $\widetilde{u}$ einer Liste u kehrt die Reihenfolge der Elemente um, also z.B. $\widetilde{\langle 1,2,3 \rangle} = \langle 3,2,1 \rangle$. Definieren Sie diese Funktion rekursiv und zeigen Sie mittels Listen-Induktion, daß $\widetilde{u \diamond v} = \widetilde{v} \diamond \widetilde{u}$.

7. Wir hätten für Listen statt $\triangleleft$ genausogut $\triangleright$ als Konstruktor neben $\langle\rangle$ verwenden können. Wie würden dann Induktion und Rekursion aussehen? Wie würde man $\diamond$ und $\triangleleft$ dann definieren?

8. Zeigen Sie für alle Listen u, v:
$$u \diamond v = \langle\rangle \iff u = \langle\rangle \vee v = \langle\rangle.$$