Mathematik und Logik

10. Übungsaufgaben im 2007W

für 2008-01-08

1. Wiederholen Sie die Beispiele der letzten beiden Wochen.

2. Es sei $M = \{\mathtt{G}, \mathtt{P}, \mathtt{W}, \mathtt{M}, \mathtt{E}, \mathtt{C}, \mathtt{J}\}$ eine Menge von Mitarbeitern und $A = \{\mathtt{A}, \mathtt{S}, \mathtt{F}, \mathtt{H}\}$ eine Menge von Abteilungen. Die Relation $Z \in M \to A \to \mathbb{P}$ sei so definiert, daß $x \xrightarrow{Z} y$ bedeutet, daß der Mitarbeiter x für die Abteilung y arbeitet. Für eine konkrete Firma könnte dies folgendermaßen aussehen:

   $$Z = \{(\mathtt{G},\mathtt{A}), (\mathtt{P},\mathtt{S}), (\mathtt{W},\mathtt{S}), (\mathtt{W},\mathtt{A}), (\mathtt{M},\mathtt{A}), (\mathtt{M},\mathtt{S}), (\mathtt{E},\mathtt{F}), (\mathtt{M},\mathtt{F}), (\mathtt{C},\mathtt{H}), (\mathtt{C},\mathtt{A}), (\mathtt{J},\mathtt{S})\}.$$

   Bestimmen Sie Z^{-1} sowie $Z^{-1}; Z$ und $Z; Z^{-1}$. Was bedeuten diese Relationen?

3. Weiters bedeute $x \xrightarrow{D} y$, daß x an y Arbeit delegiert. Für unsere Firma sei dies folgendermaßen definiert:

   $$D = \{(\mathtt{G},\mathtt{C}), (\mathtt{G},\mathtt{W}), (\mathtt{C},\mathtt{M}), (\mathtt{W},\mathtt{E}), (\mathtt{E},\mathtt{M}), (\mathtt{P},\mathtt{W}), (\mathtt{P},\mathtt{M}), (\mathtt{P},\mathtt{J}), (\mathtt{J},\mathtt{W}), (\mathtt{J},\mathtt{M})\}.$$

   Bestimmen Sie, sofern definiert, $S; D$, $D; S$, S^2, D^2. Interpretieren Sie diese Relationen auch inhaltlich.

4. Eine Relation R in X heißt *transitiv*, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt

   $$x \xrightarrow{R} y \wedge y \xrightarrow{R} z \implies x \xrightarrow{R} z.$$

   Zeigen Sie, daß R genau dann transitiv ist, wenn $R^2 \subseteq R$.

   Ist die Relation D (von oben) transitiv. Ist D^2 transitiv? $D \cup D^2$?

   Berechnen Sie

   $$D^+ := D \cup D^2 \cup D^3 \cup D^4 \cup \dots .$$

   Überzeugen Sie sich, daß D^+ transitiv ist. Kann es eine kleinere Relation geben, die D umfaßt und transitiv ist? Interpretieren Sie D^+ inhaltlich.

5. Sei $\prec$ die Vorgänger-Relation in $\mathbb{N}$ definiert durch

   $$x \prec y :\iff 1 + x = y.$$

   Bestimmen sie die transitive Hülle $\prec^+$. Kennen Sie diese Relation?

6. Eine Relation R in X heißt *reflexiv*, wenn $x \xrightarrow{R} x$ für alle $x \in X$ gilt. Sie ist eine *Quasiordnung* wenn sie reflexiv und transitiv ist. Mit R^* bezeichnen wir dann jene Relation, die gerade groß genug ist, daß sie R umfaßt und eine Quasiordnung ist (genannt auch die *reflexiv-transitive Hülle*) Zeigen Sie, daß

$$D^* := D^0 \cup D^1 \cup D^2 \cup D^3 \cup D^4 \cup \ldots.$$

   (Wie muß dabei D^0 definiert werden?)

   Bestimmen Sie die reflexiv-transitive Hülle $\prec^*$ der Vorgänger-Relation von oben.

7. Betrachten Sie die Teilbarkeitsrelation in $\mathbb{Z}$. Warum ist diese eine Quasiordnung?

   Überzeugen Sie sich, daß die Relation $\equiv : X \to X \to \mathbb{P}$, definiert durch

$$x \equiv y :\Longleftrightarrow \; x \xrightarrow{Q} y \;\wedge\; y \xrightarrow{Q} x,$$

   für jede Quasiordnung $Q \in X \to X \to \mathbb{P}$ eine Äquivalenzrelation ergibt. Was ergibt sich dabei speziell für die Teilbarkeitsrelation?

8. Es sei $\prec: \Sigma^* \to \Sigma^* \to \mathbb{P}$ jene Relation, welche gerade umfassend genug ist, sodaß für alle $u \in \Sigma^*$ und $\alpha \in \Sigma$ gilt

$$u \prec \alpha \triangleleft u.$$

   Beschreiben Sie reflexiv-transitive Hülle $\prec^*$ möglichst direkt.