Mathematik und Logik

9. Übungsaufgaben

2007-01-23

1. Beweisen Sie geometrisch, daß die Addition von Vektoren in der Ebene assoziativ ist.

   Beweis. Man zeichnet die entsprechenden Parallelogramme. □

2. Der *Kern* einer linearen Abbildung h besteht aus allen Vektoren $\mathbf{v}$, die $h(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$ erfüllen. Rechnen Sie nach, daß dies stets ein linearer Unterraum ist.

   Beweis. Seien $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ im Kern; wir zeigen, daß dann auch $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ und $\lambda\mathbf{v}$ (λ ein beliebiger Skalar) im Kern sind.

   Laut Voraussetzung gelten $h(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$ und $h(\mathbf{w}) = \mathbf{o}$. Weil h linear ist, gelten dann auch

$$
\begin{aligned}
h(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= h(\mathbf{v}) + h(\mathbf{w}) \\
&= \mathbf{o} + \mathbf{o} \\
&= \mathbf{o} \\
h(\lambda\mathbf{v}) &= \lambda\mathbf{h}(\mathbf{v}) \\
&= \lambda\mathbf{o} \\
&= \mathbf{o}.
\end{aligned}
$$

   □

3. Zeigen Sie, daß eine lineare Abbildung genau dann injektiv ist, wenn deren Kern nur den Nullvektor umfaßt.

   Beweis. Einerseits sieht man leicht, daß $h(\mathbf{o})$ für jede lineare Abbildung h gilt.

   Ist nun $\mathbf{v}$ irgendein Vektor mit $h(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, dann ist somit $h(\mathbf{v}) = h(\mathbf{o})$; und wenn h injektiv ist, daher auch $\mathbf{v} = \mathbf{o}$. □

4. Ist die Hintereinanderausführung linearer Abbildungen wieder linear?

Beweis. Ja. Seien h_1, h_2 zwei lineare Abbildungen. Dann gelten:

$$\begin{aligned}
(h_2 \circ h_1)(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (h_1(h_2(\mathbf{v} + \mathbf{w})) && \text{(Def. v. } \circ) \\
&= h_2(h_1(\mathbf{v}) + h_1(\mathbf{w})) && \text{(Linearität von } h_1) \\
&= h_2(h_1(\mathbf{v})) + h_2(h_1(\mathbf{w})) && \text{(Linearität von } h_2) \\
&= (h_2 \circ h_1)(\mathbf{v}) + (h_2 \circ h_1)(\mathbf{w}) && \text{(Def. v. } \circ) \\
(h_2 \circ h_1)(\lambda\mathbf{v}) &= \lambda(h_2 \circ h_1)(\mathbf{v}) && \text{(analog).}
\end{aligned}$$

□

5. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

   (a) Konstante Abbildungen;

   Beweis. Nein (außer wenn die Konstante der Nullvektor ist), nicht verträglich mit Skalierung. □

   (b) Die Länge eines Vektors;

   Beweis. Nein, nicht verträglich mit Summe von Vektoren verschiedener Richtungen. Auch nicht mit der Skalierung durch negative Skalare. □

   (c) Die Abbildung $x \mapsto -x$;

   Beweis. Ja, ist eine Skalierung. □

   (d) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$;

   Beweis. Nein, weil z.B. das Paar $(0, 0)$ nicht auf $(0, 0, 0)$ abgebildet wird. □

   (e) Die Betragsfunktion;

   Beweis. Nein, eindimensionaler Spezialfall der Länge eines Vektors; nicht verträglich mit Skalierung mit negativen Zahlen; außerdem: $\operatorname{abs} -3 + 3 \neq \operatorname{abs} -3 + \operatorname{abs} 3$. □

   (f) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (y, x)$;

Beweis. Ja, einfache Rechnung. $\square$

(g) Die Abbiildung $(x, y) \mapsto (x, y - 4x)$;

Beweis. Ja, einfache Rechnung. $\square$

(h) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$;

Beweis. Ja, ist fast die Identität; die dritte Komponente ist die Konstante 0. $\square$

(i) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$;

Beweis. Nein. Hier ist die dritte Komponente konstant, und nicht 0. $\square$

(j) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x)$;

Beweis. Ja; einfache Rechnung. Projektion sind immer linear. $\square$

(k) Eine Drehung um $50°$;

Beweis. Eine Drehung ist dann und nur dann linear, wenn die Drehachse durch denn Nullpunkt führt; eine Zeichnung erklärt daas sofort. $\square$

(l) Die Varianz einer Zufallsvariablen;

Beweis. Nein, die Varianz einer Summe ist nur dann die Summe der Varianzen, wenn diese unkorreliert sind. Außerdem $\operatorname{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \operatorname{Var}(X) \neq \lambda \operatorname{Var}(X)$ (für $\lambda \neq 0$). $\square$

(m) Die Standardabweichung einer Zufallsvariablen;

Beweis. Nein, dasselbe Problem wie bei der Länge eines Vektors. $\square$

(n) Die Abbildung, die jeder Funktion den Funktionswert an einer bestimmten Stelle zuordnet;

Beweis. Ja; einfache Rechnung bzw. Definition der Summe von Funktionen. $\square$

(o) Die zweite Ableitung;

Beweis. Ja; dies ist die zweimalige Hintereinanderausführung der ersten Ableitung, also die Hintereinanderausführung zweier linearer Abbildungen. $\square$

(p) Die Umrechnung zwischen Celsius und Fahrenheit.

Beweis. Nein; $0°C \neq 0°F$. $\square$

6. Bestimmen Sie den Kern des Differentialoperators.

Beweis. Von genau den konstanten Funktionen ist die Ableitung 0. Daher besteht dieser Kern genau aus den konstanten Funktionen. $\square$

7. Eine Abbildung ist *affin*, wenn sie mit allen Affinkombinationen verträglich ist. Zeigen Sie, daß sich jede affine Abbildung als Summe einer linearen Abbildung und einer konstanten Abbildung darstellen läßt.

Beweis. Wir bemerken, daß konstante Abbildungen immer affin sind (einfache Rechnung).

Jede Linearkombination läßt sich als Affinkombination auffassen, wenn der Nullvektor künstlich hinzugefügt wird, d.h.: Sei $\sum_{k=1}^n a_k \mathbf{v}_k$ eine Linearkombination, dann ist $\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{v}_k + (1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k) \cdot \mathbf{o}$ eine Affinkombination. Ist nun h affin, so gilt

$$
\begin{aligned}
h(\sum_{k=1}^n a_k \mathbf{v}_k) &= h(\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{v}_k + (1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k)\mathbf{o}) \\
&= \sum_{k=1}^n \lambda_k h(\mathbf{v}_k) + (1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k) h(\mathbf{o}).
\end{aligned}
$$

Die Abbildung $\mathbf{v} \mapsto h(\mathbf{v}) - h(\mathbf{o})$ ist somit linear, und h selbst ist die Summe dieser Abbildung und der Konstanten $h(\mathbf{o})$. $\square$

8. Ein affiner Unterraum, ist eine Teilmenge, welche gegenüber allen Affinkombinationen abgeschlossen ist. Wie ist hier der Zusammenhang mit den linearen Unterräumen?

Beweis. Ein affiner Unterraum ist genau dann linear wenn er den Nullpunkt enthält.

Sei A ein affiner Unterraum und $\mathbf{v}_0 \in A$, dann ist $L := A - \mathbf{v}_0$ ein linearer Unterraum und $A = \mathbf{v}_0 + L$ (und L ist mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt).

Anschaulich: In der Ebene sind die Gerade typische affine Unterräume. Sie sind nur dann lineare Unterräume, wenn sie durch den Nullpunkt führen. Außerdem ist jeder Punkt ein affiner Unterraum, aber nur der Nullpukt ein linearer. □

eine bijektive lineare Abbildung (d.h. einen Isomorphismus) zwischen diesen beiden Vektorräumen.

Beweis. Durch $h(\mathbf{b}_k) = \mathbf{c}_k$, für $k = 1, \ldots, n$, wird die lineare Abbildung eindeutig festgelegt. Ganz ähnlich kann auch die Umkehrabbildung festgelegt werden; somit ist h auch bijektiv. □

9. Es sei $\{ \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \}$ eine Basis des Vektorraums V und $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{b}_k$. Ist auch $\{ \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{v} \}$ eine Basis?

   Beweis. Dies gilt genau dann, wenn $\lambda_n \neq 0$.

   Es sei $B = \{ \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \}$ und $B' = \{ \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{v} \}$.

   Wir zeigen zunächst, daß beide Mengen dieselbe lineare Hülle besitzen. Einerseits ist wegen

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \mathbf{b}_k + \mu_n \mathbf{v} &= \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \mathbf{b}_k + \mu_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{b}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k \mathbf{b}_k + \sum_{k=1}^{n} \mu_n \lambda_k \mathbf{b}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (\mu_k + \mu_n \lambda_k) \mathbf{b}_k + \mu_n \lambda_n \mathbf{b}_n
\end{aligned}
$$

   jede Linearkombination von Elementen von B' auch eine von B, d.h. $L(B') \subseteq L(B)$. Andererseits ist, weil sich auch $\mathbf{b}_n$ als $\mathbf{b}_n = \frac{1}{\lambda_n}(v - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \mathbf{b}_k)$ darstellen läßt (hier wird die Bedingung $\lambda_n \neq 0$ verwendet), mit derselben Begründung auch $L(B) \subseteq L(B')$, somit $L(B) = L(B')$.

Eine ähnliche Rechnung zeigt schließlich, daß B' auch linear unabhängig ist. Somit ist auch B' eine Basis von V. $\square$

10. $D_{\varphi_1}, D_{\varphi_2}$ seien Drehungen. Bestimmen Sie $D_{\varphi_1} \circ D_{\varphi_2}$. Gilt $D_{\varphi_1} \circ D_{\varphi_2} = D_{\varphi_2} \circ D_{\varphi_1}$? Bestimmen Sie die Abbildungmatrix von $D_{\varphi_1} \circ D_{\varphi_2}$ und vergleichen Sie diese mit der von $D_{\varphi_1+\varphi_2}$.

Beweis. Einfache geometrische Überlegungen zeigen:

$$D_{\varphi_1} \circ D_{\varphi_2} = D_{\varphi_1+\varphi_2}.$$

Und für die Abbildungsmatrizen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
(D_{\varphi_1} \circ D_{\varphi_2})_{E;E} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 & -(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2) \\ \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 \cdot \cos\ \varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 \end{pmatrix} \\
(D_{\varphi_1+\varphi_2})_{E;E} &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \ \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 + \ \varphi_2) \\ -\sin(\varphi_1 + \ \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \ \varphi_2) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen entsteht dabei direkt aus der Erkenntnis im vorigen Beispiel. Für die erste rechnen wir z.B.:

$$\begin{aligned}
(D_{\varphi_1} \circ D_{\varphi_2})(\mathbf{e}_1) &= D_{\varphi_1}(D_{\varphi_2}(\mathbf{e}_1)) \\
&= D_{\varphi_1}(\cos\varphi_2 \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\varphi_2 \cdot \mathbf{e}_2) \\
&= \ \cos\varphi_2 \cdot D_{\varphi_1}\mathbf{e}_1 + \sin\varphi_2 \cdot D_{\varphi_1}\mathbf{e}_2) \\
&= \ \cos\varphi_2 \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\varphi_2 \cdot \mathbf{e}_2) \\
&\quad\ + \sin\varphi_2 \cdot (-\sin\varphi_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cos\varphi_1 \cdot \mathbf{e}_2) \\
&= (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) \cdot \mathbf{e}_1 \\
&\quad\ + (\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) \cdot \mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

Da beide Matrizen gleich sein sollten (weil sie ja die Abbildungsmatrizen derselben linearen Abbildung zu denselben Basen bezeichnen), folgen damit auch die bekannten Additionstheoreme für die Winkelfunktionen:

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi_1 + \varphi 2) &= \ \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2, \\
\sin(\varphi_1 + \varphi 2) &= \ \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2.
\end{aligned}$$

$\square$

Rechnen Sie auch hier zumindest ein Beispiel mit zwei konkreten Winkeln.

11. Die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung h sei

$$h_{B;C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $h(\mathbf{v})$, wobei $\mathbf{v}$ gegeben ist durch

$$(\mathbf{v})_B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Seien $B = \{\,\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\,\}$, $C = \{\,\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\,\}$.

$$\begin{aligned} h(\mathbf{v}) &= h(7\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2) \\ &= 7h(\mathbf{b}_1) - 3h(\mathbf{b}_2) \\ &= 7(2\mathbf{c}_1 - 4\mathbf{c}_2) - 3(4\mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2) \\ &= (7 \cdot 2 - 3 \cdot 4)\mathbf{c}_1 + (7 \cdot (-4) - 3 \cdot 3)\mathbf{c}_2 \\ &= 2\mathbf{c}_1 - 37\mathbf{c}_2. \end{aligned}$$

Somit ist

$$(h(\mathbf{v}))_C = \begin{pmatrix} 2 \\ -37 \end{pmatrix}.$$

$\square$

12. Gegeben sei eine Ebene im Raum. Wir legen den Nullpunkt so fest, daß er in der Ebene liegt; und eine Basis, so daß zwei der Vektoren die Ebene aufspannen und der dritte im rechten Winkel darauf steht. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix einer Spiegelung an dieser Ebene.

Beweis. Es sei $B = \{\,\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\,\}$, wobei $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ in der Ebenie liegen und $\mathbf{b}_3$ im rechten Winkel dazu. Sei s die Spiegelung an dieser Ebene. Dann gilt:

$$\begin{aligned} s\mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}_1, \\ s\mathbf{b}_2 &= \mathbf{b}_2, \\ s\mathbf{b}_3 &= -\mathbf{b}_3. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Abbildungsmatrix

$$s_{B;B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$