

# Mathematik und Logik

## 5. Übungsaufgaben

2006-11-21

1. Beweisen Sie, daß die Aussage

$$\neg\neg\neg A \implies \neg A$$

allgemeingültig ist.

*Beweis.* Dies ist ein Spezialfall von

$$(((A \implies B) \implies B) \implies B) \implies (A \implies B),$$

was wir wie folgt beweisen.

Es gelte  $((A \implies B) \implies B) \implies B$  und  $A$ . Zu zeigen ist  $B$ . Wegen der ersten Annahme, reicht es  $(A \implies B) \implies B$  zu zeigen. Dies folgt aber aus  $A$  (in der Vorlesung bewiesen).  $\square$

2. Beweisen Sie, daß die Aussage

$$A \vee \neg A \implies (\neg\neg A \implies A)$$

allgemeingültig ist.

*Beweis.* Es gelte  $A \vee \neg A$  und  $\neg\neg A$ . Zu beweisen ist  $A$ .

Wir beweisen mit Fallunterscheidung. Wenn  $A$  gilt, sind wir fertig. Wenn  $\neg A$  gilt, so leiten wir aus  $\neg\neg A$  mittels  $\implies\mathcal{E}$  den Widerspruch  $\perp$  her. Und somit gilt auch  $A$ .  $\square$

3. Beweisen Sie, daß die Aussage

$$\neg\neg(A \vee \neg A)$$

allgemeingültig ist.

*Beweis.* Es gelte  $\neg(A \vee \neg A)$ . Zu zeigen ist  $\perp$ .

Aus der Annahme erhalten wir  $\neg A \wedge \neg\neg A$  (Spezialfall der allgemeingültigen Formel  $(A \vee B \implies C) \implies (A \implies C) \wedge (B \implies C)$ ). Daraus ergibt sich aber sofort  $\perp$ .  $\square$

4. Versuchen Sie das Gesetz von Pierce

$$((A \implies B) \implies A) \implies A$$

mit den bekannten Regeln zu beweisen. Verwenden Sie dann eine Wahrheitstafel.

*Beweis.* Mit den bekannten Regeln kommen wir nicht weiter. Eine Wahrheitstafel ergibt:

$A$	$B$	$A \implies B$	$(A \implies B) \implies A$	$((A \implies B) \implies A) \implies A$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$

Dabei wird implizit angenommen, daß  $A \vee \neg A$  und  $B \vee \neg B$  gelten. Tatsächlich reicht die Annahme  $A \vee \neg A$ , um zum Ziel zu kommen:

Es gelte  $A \vee \neg A$  und  $(A \implies B) \implies A$ . Zu zeigen:  $A$ . Wir verwenden Fallunterscheidung. Gilt  $A$ , so sind wir fertig. Gilt  $\neg A$ , so auch  $A \implies B$  (Beweis: Aus  $\neg A$  und  $A$  folgt  $\perp$  und somit auch  $B$ ). Daraus schließlich mit der Voraussetzung auch  $A$ .  $\square$

5. Beweisen Sie das Assoziativgesetz für die Addition natürlicher Zahlen.

*Beweis.* Von der Addition verwenden wir nur die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 + m &= m \\ S n + m &= S(n + m) \end{aligned}$$

Für beliebige  $n, m, p: \mathbb{N}$  ist zu zeigen

$$(n + m) + p = n + (m + p).$$

Wir verwenden Induktion nach  $n$ .

**Induktionsanfang** Zu zeigen ist:  $(0 + m) + n = 0 + (m + n)$ . Es folgt sofort aus der Definition, daß beide Seiten gleich zu  $m + n$  ist.

**Induktionsschritt** Wir nehmen  $(n + m) + p = n + (m + p)$  als Induktionshypothese an und beweisen damit

$$(Sn + m) + p = Sn + (m + p).$$

Dazu formen wir folgendermaßen um

$$\begin{aligned}(Sn + m) + p &= S(n + m) + p \\ &= S((n + m) + p) \\ &= S(n + (m + p)) \\ &= Sn + (m + p)\end{aligned}$$

□

6. Zeigen Sie  $\neg(0 = 1)$ .

*Beweis.* Wir definieren eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \Omega$  durch

$$\begin{aligned}f0 &= \top \\ f(Sn) &= \perp\end{aligned}$$

Aus  $0 = 1$  folgt mit der Wohldefiniertheit  $f0 = f1$  und damit  $\top \iff \perp$ . □

7. Zeigen Sie, daß die Multiplikation von natürlichen Zahlen, definiert durch

$$\begin{aligned}0 \cdot m &= 0, \\ (Sn) \cdot m &= n \cdot m + m,\end{aligned}$$

assoziativ und kommutativ ist.

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, daß für beliebige  $n, m, p: \mathbb{N}$  gilt

$$(n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p).$$

Wir verwenden Induktion nach  $n$ .

**Induktionsanfang** Zu zeigen:  $(0 \cdot m) \cdot p = 0 \cdot (m \cdot p)$ . Es folgt wieder direkt aus der Definition, daß beide Seiten gleich 0 sind.

**Induktionsschritt** Wir nehmen  $(n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p)$  als Induktionshypothese an und zeigen damit

$$(Sn \cdot m) \cdot p = Sn \cdot (m \cdot p).$$

Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}(Sn \cdot m) \cdot p &= (n \cdot m + m) \cdot p \\ &= (n \cdot m) \cdot p + m \cdot p \\ &= n \cdot (m \cdot p) + m \cdot p \\ &= (Sn) \cdot (m \cdot p)\end{aligned}$$

Dabei haben wir aber ein Distributivgesetz verwendet, in der Form, daß für alle  $n, m, p: \mathbb{N}$  gilt:

$$(n + m) \cdot p = n \cdot p + m \cdot p.$$

Wir zeigen daher auch dieses Gesetz mit Induktion nach  $n$ .

**Induktionsanfang** Zu zeigen:  $(0+m) \cdot p = 0 \cdot p + m \cdot p$ , was wieder einfach folgt:  $(0 + m) \cdot p = m \cdot p = 0 + m \cdot p = (0 \cdot p) + m \cdot p$ .

**Induktionsschritt** Wir nehmen  $(n + m) \cdot p = n \cdot p + m \cdot p$  als Induktionshypothese an und zeigen damit

$$(Sn + m) \cdot p = Sn \cdot p + m \cdot p.$$

Dazu formen wir folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}(Sn + m) \cdot p &= S(n + m) \cdot p \\ &= (n + m) \cdot p + p \\ &= (n \cdot p + m \cdot p) + p \\ &= n \cdot p + (m \cdot p + p) \\ &= n \cdot p + (p + m \cdot p) \\ &= (n \cdot p + p) + m \cdot p \\ &= Sn \cdot p + m \cdot p.\end{aligned}$$

Wir zeigen noch das Kommutativgesetz:

$$n \cdot m = m \cdot n$$

mit Induktion nach  $n$ .

**Induktionsanfang** Zu zeigen:  $0 \cdot m = m \cdot 0$ . Die linke Seite ist per definitionem gleich 0. Daß auch die rechte Seite gleich 0 ist zeigt man mit Induktion nach  $m$ .

**Induktionsschritt** Wir formen folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} Sn \cdot m &= n \cdot m + m \\ &= m \cdot n + m \\ &= m \cdot Sn. \end{aligned}$$

Für den letzten Beweisschritt benötigt man ebenfalls eine Induktion nach  $m$ .

□

8. Formulieren und beweisen Sie die üblichen Potenzgesetze.

*Beweis.* Zuerst definieren wir das Potenzieren mittels

$$\begin{aligned} x^0 &= 1 \\ x^{Sn} &= x \cdot x^n. \end{aligned}$$

Nun zeigen wir mittels Induktion nach  $n$

$$x^{n+m} = x^n \cdot x^m.$$

**Induktionsanfang**  $x^{0+m} = x^m = 1 \cdot x^m = x^0 \cdot x^m$ .

**Induktionsschritt**  $x^{Sn+m} = x^{S(n+m)} = x \cdot x^{n+m} = x \cdot (x^n \cdot x^m) = (x \cdot x^n) \cdot x^m = x^{Sn} \cdot x^m$ .

Ebenso für

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

**Induktionsanfang**  $(x^m)^0 = 1 = x^0 = x^{m \cdot 0}$ .

**Induktionsschritt**  $(x^m)^{Sn} = x^m \cdot (x^m)^n = x^m \cdot x^{m \cdot n} = x^{m+(m \cdot n)} = x^{m \cdot Sn}$ .

Schließlich läßt sich auch

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$

mittels Induktions nach  $n$  beweisen; dabei spielt die Kommutativität der Multiplikations eine entscheidende Rolle. □

9. Zeigen Sie, daß gilt

$$\forall_{n:\mathbb{N}} \forall_{m:\mathbb{N}} n = m \vee \neg(n = m).$$

*Beweis.* Eine Möglichkeit besteht darin die Induktion zuerst nach  $n$  und dann nach  $m$  zu führen. Wesentlich ist dann, daß gilt:  $n = m \iff Sn = Sm$ .  $\square$

10. Prüfen Sie nach, daß die Addition von ganzen Zahlen, definiert durch

$$(a - b) + (c - d) := (a + c) - (b + d),$$

wohldefiniert ist. (Die ganzen Zahlen seien durch einen Konstruktor  $- : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  und  $a - b = c - d : \iff a + d = c + b$  definiert.)

*Beweis.* Es seien

$$\begin{aligned} a_1 - b_1 &= a_2 - b_2 \\ c_1 - d_1 &= c_2 - d_2 \end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, daß dann auch

$$(a_1 - b_1) + (c_1 - d_1) = (a_2 - b_2) + (c_2 - d_2).$$

Einsetzen der Definition der Addition ganzer Zahlen formt dies zu

$$(a_1 + c_1) - (b_1 + d_1) = (a_2 + c_2) - (b_2 + d_2)$$

um; und mittels Definition des Gleichheitsbegriff für ganze Zahlen wird dies zu

$$(a_1 + c_1) + (b_2 + d_2) = (a_2 + c_2) + (b_1 + d_1).$$

Ebenso läßt sich die Voraussetzung zu

$$\begin{aligned} a_1 + b_2 &= a_2 + b_1 \\ c_1 + d_2 &= c_2 + d_1 \end{aligned}$$

umformen. Zusammenzählen dieser beiden Gleichungen ergibt schließlich

$$(a_1 + b_2) + (c_1 + d_2) = (a_2 + b_1) + (c_2 + d_1),$$

was bis auf die Klammerung und Reihenfolge mit dem Beweisziel übereinstimmt. Das Assoziativ- und das Kommutativgesetz für die Addition natürlicher Zahlen vollenden somit den Beweis.  $\square$