

Mathematik und Logik

4. Übungsaufgaben

2006-11-14

Definition

$$\begin{aligned} [] \diamond v &= v \\ (\alpha \triangleleft u) \diamond v &= \alpha \triangleleft (u \diamond v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [] \triangleright \zeta &= \zeta \triangleleft [] \\ (\alpha \triangleleft u) \triangleright \zeta &= \alpha \triangleleft (u \triangleright \zeta) \end{aligned}$$

1. $(u \diamond v) \diamond w = u \diamond (v \diamond w)$.

Beweis. Für einen beliebigen Datentyp A ist zu zeigen

$$\forall_{u: A^*} \forall_{v: A^*} \forall_{w: A^*} (u \diamond v) \diamond w = u \diamond (v \diamond w).$$

Dies ist eine Allaussage über einen Listendatentyp. Es bietet sich somit ein Beweis mittels Listen-Induktion an.

Induktionsanfang Wir haben $([] \diamond v) \diamond w = [] \diamond (v \diamond w)$ für beliebige $v, w: A^*$ zu zeigen. Tatsächlich gilt:

$$\begin{aligned} ([] \diamond v) \diamond w &= v \diamond w && \text{(Definition von } \diamond \text{)} \\ &= [] \diamond (v \diamond w) && \text{(Definition von } \diamond, \leftarrow, \text{ mit } v := v \diamond w \text{)}. \end{aligned}$$

Induktionsschritt Für ein beliebiges $u: A^*$ nehmen wir

$$\forall_{v: A^*} \forall_{w: A^*} (u \diamond v) \diamond w = u \diamond (v \diamond w)$$

als Induktionshypothese an und zeigen damit für jedes $\alpha: A$

$$\forall_{v: A^*} \forall_{w: A^*} ((\alpha \triangleleft u) \diamond v) \diamond w = (\alpha \triangleleft u) \diamond (v \diamond w)$$

Tatsächlich gilt:

$$\begin{aligned}
((\alpha \triangleleft u) \diamond v) \diamond w &= (\alpha \triangleleft (u \diamond v)) \diamond w && \text{(Def von } \diamond) \\
&= \alpha \triangleleft ((u \diamond v) \diamond w) && \text{(Def von } \diamond, \text{ mit } u := u \diamond v, v := w) \\
&= \alpha \triangleleft (u \diamond (v \diamond w)) && \text{(IndHyp)} \\
&= (\alpha \triangleleft u) \diamond (v \diamond w) && \text{(Def von } \diamond, \leftarrow, v := v \diamond w).
\end{aligned}$$

□

2. $u \diamond [] = u = [] \diamond u$.

Beweis. Als erstes ist für einen beliebigen Datentyp A zu zeigen

$$\forall_{u: A^*} u \diamond [] = u.$$

Dies ist eine Allaussage über einen Listendatentyp. Es bietet sich somit ein Beweis mittels Listen-Induktion an.

Induktionsanfang Wir haben $[] \diamond [] = []$ zu zeigen, was sofort aus der Definition von \diamond folgt.

Induktionsschritt Für ein beliebiges $u: A^*$ nehmen wir

$$u \diamond [] = u$$

als Induktionshypothese an und zeigen damit für jedes $\alpha: A$

$$(\alpha \triangleleft u) \diamond [] = \alpha \triangleleft u.$$

Tatsächlich gilt:

$$\begin{aligned}
(\alpha \triangleleft u) \diamond [] &= \alpha \triangleleft (u \diamond []) && \text{(Def von } \diamond) \\
&= \alpha \triangleleft u && \text{(IndHyp)}.
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit folgt direkt aus der Definition.

□

3. $u \diamond (v \triangleright \zeta) = (u \diamond v) \triangleright \zeta$.

Beweis. Für einen beliebigen Datentyp A ist zu zeigen

$$\forall_{u: A^*} \forall_{v: A^*} \forall_{\zeta: A} (u \diamond v) \triangleright \zeta = u \diamond (v \triangleright \zeta).$$

Dies ist eine Allaussage über einen Listendatentyp. Es bietet sich somit ein Beweis mittels Listen-Induktion an.

Induktionsanfang Wir haben $([] \diamond v) \triangleright \zeta = [] \diamond (v \triangleright \zeta)$ für beliebige $v: A^*$, $\zeta: A$ zu zeigen. Tatsächlich gilt:

$$\begin{aligned} ([] \diamond v) \triangleright \zeta &= v \triangleright \zeta && \text{(Definition von } \diamond) \\ &= [] \diamond (v \triangleright \zeta) && \text{(Definition von } \diamond, \leftarrow, \text{ mit } v := v \triangleright \zeta). \end{aligned}$$

Induktionsschritt Für ein beliebiges $u: A^*$ nehmen wir

$$\forall_{v: A^*} \forall_{\zeta: A} (u \diamond v) \triangleright \zeta = u \diamond (v \triangleright \zeta)$$

als Induktionshypothese an und zeigen damit für jedes $\alpha: A$

$$\forall_{v: A^*} \forall_{\zeta: A} ((\alpha \triangleleft u) \diamond v) \triangleright \zeta = (\alpha \triangleleft u) \diamond (v \triangleright \zeta)$$

Tatsächlich gilt:

$$\begin{aligned} ((\alpha \triangleleft u) \diamond v) \triangleright \zeta &= (\alpha \triangleleft (u \diamond v)) \triangleright \zeta && \text{(Def von } \diamond) \\ &= \alpha \triangleleft ((u \diamond v) \triangleright \zeta) && \text{(Def von } \triangleright, \text{ mit } u := u \diamond v, v := \zeta) \\ &= \alpha \triangleleft (u \diamond (v \triangleright \zeta)) && \text{(IndHyp)} \\ &= (\alpha \triangleleft u) \diamond (v \triangleright \zeta) && \text{(Def von } \diamond, \leftarrow, v := v \triangleright \zeta). \end{aligned}$$

□

4. $\widetilde{u} = u$.

Beweis. Für einen beliebigen Datentyp A ist zu zeigen

$$\forall_{u: A^*} \widetilde{u} = u.$$

Dies ist eine Allaussage über einen Listendatentyp. Es bietet sich somit ein Beweis mittels Listen-Induktion an.

Induktionsanfang Wir haben $\widetilde{[]} = []$ zu zeigen, was sofort durch zweimalige Anwendung der Definition folgt.

Induktionsschritt Für ein beliebiges $u: A^*$ nehmen wir

$$\widetilde{u} = u$$

als Induktionshypothese an und zeigen damit für jedes $\alpha: A$

$$\widetilde{\alpha \triangleleft u} = \alpha \triangleleft u.$$

Tatsächlich gilt:

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha \triangleleft u} &= \widetilde{u \triangleright \alpha} && \text{(Def von } \widetilde{} \text{)} \\ &= \alpha \triangleleft \widetilde{u} && \text{(Satz über } \widetilde{} \text{)} \\ &= \alpha \triangleleft u && \text{(IndHyp).}\end{aligned}$$

Hier wurde der folgende Satz verwendet:

$$\forall_{u: A^*} \forall_{\zeta: A} \widetilde{u \triangleright \zeta} = \zeta \triangleleft \widetilde{u}.$$

Diesen zeigt man ebenfalls mit Induktion:

Induktionsanfang $\widetilde{\square \triangleright \zeta} = \widetilde{\zeta \triangleleft \square} = \widetilde{\square} \triangleright \zeta = \square \triangleright \zeta = \zeta \triangleleft \square = \zeta \triangleleft \widetilde{\square}.$

Induktionsschritt $(\alpha \triangleleft u) \triangleright \zeta = \alpha \triangleleft (u \triangleright \zeta) = \widetilde{u \triangleright \zeta} \triangleright \alpha = (\zeta \triangleleft \widetilde{u}) \triangleright \alpha = \zeta \triangleleft (\widetilde{u \triangleright \alpha}) = \zeta \triangleleft \widetilde{\alpha \triangleleft u}.$

□

5. $f^*(u \diamond v) = f^*u \diamond f^*v.$

Beweis. Auch hier führt eine einfache Induktion nach u zum Ziel.

Induktionsanfang $f^*(\square \diamond v) = f^*v = \square \diamond f^*v = f\square \diamond f^*v.$

Induktionsschritt $f^*((\alpha \triangleleft u) \diamond v) = f^*(\alpha \triangleleft (u \diamond v)) = f\alpha \triangleleft f^*(u \diamond v) = f\alpha \triangleleft (f^*u \diamond f^*v) = (f\alpha \triangleleft f^*u) \diamond f^*v = f^*(\alpha \triangleleft u) \diamond f^*v.$

□

6. $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*.$

Beweis. Für die Gleichheit von Funktionen zeigen wir die Extensionalität:

$$\forall_{u: A^*} (g \circ f)^*u = (g^* \circ f^*)u,$$

was wiederum mit einfacher Induktion erfolgt.

Induktionsanfang $(g \circ f)^*\square = \square = g^*\square = g^*(f^*\square) = (g^* \circ f^*)\square.$

Induktionsschritt $(g \circ f)^*(\alpha \triangleleft u) = (g \circ f)\alpha \triangleleft (g \circ f)^*u = (g \circ f)\alpha \triangleleft (g^* \circ f^*)u = g(f\alpha) \triangleleft g^*(f^*u) = g^*(f\alpha \triangleleft f^*u) = g^*(f^*(\alpha \triangleleft u)) = (g^* \circ f^*)(\alpha \triangleleft u).$

□

$$7. f^*(u \triangleright \zeta) = f^*u \triangleright f\zeta.$$

Beweis. Sehr ähnlich zu Beispiel 5. □

8. Falls man $P(\square)$ und

$$\forall_{u: A^*} \left(Pu \implies \forall_{\zeta: A} P(u \triangleright \zeta) \right),$$

dann gilt auch

$$\forall_{u: A^*} Pu.$$

Ein Versuch, dies mit Induktion zu zeigen scheitert. Stattdessen verwenden wir, daß für alle Eigenschaften $P: A^* \rightarrow \Omega$ gilt:

$$\forall_{u: A^*} P(u) \iff \forall_{u: A^*} P(\tilde{u}).$$

Damit erhalten wir aus der Voraussetzung

$$\forall_{u: A^*} \left(P(\tilde{u}) \implies \forall_{\zeta: A} P(\tilde{u} \triangleright \zeta) \right),$$

was sich zu

$$\forall_{u: A^*} \left(P(\tilde{u}) \implies \forall_{\zeta: A} P(\zeta \triangleleft u) \right),$$

umformen läßt. Damit ergibt sich mittels normaler Induktion

$$\forall_{u: A^*} P(\tilde{u}),$$

woraus dann das Beweisziel folgt.