Mathematik und Logik

9. Übungsaufgaben

2007-01-23

1. Beweisen Sie geometrisch, daß die Addition von Vektoren in der Ebene assoziativ ist.
2. Der *Kern* einer linearen Abbildung h besteht aus allen Vektoren $\mathbf{v}$, die $h(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$ erfüllen. Rechnen Sie nach, daß dies stets ein linearer Unterraum ist.
3. Zeigen Sie, daß eine lineare Abbildung genau dann injektiv ist, wenn deren Kern nur den Nullvektor umfaßt.
4. Ist die Hintereinanderausführung linearer Abbildungen wieder linear?
5. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?
   (a) Konstante Abbildungen;
   (b) Die Länge eines Vektors;
   (c) Die Abbildung $x \mapsto -x$;
   (d) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$;
   (e) Die Betragsfunktion;
   (f) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (y, x)$;
   (g) Die Abbiildung $(x, y) \mapsto (x, y - 4x)$;
   (h) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$;
   (i) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$;
   (j) Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x)$;
   (k) Eine Drehung um $50°$;
   (l) Die Varianz einer Zufallsvariablen;
   (m) Die Standardabweichung einer Zufallsvariablen;

(n) Die Abbildung, die jeder Funktion den Funktionswert an einer bestimmten Stelle zuordnet;

(o) Die zweite Ableitung;

(p) Die Umrechnung zwischen Celsius und Fahrenheit.

6. Bestimmen Sie den Kern des Differentialoperators.

7. Eine Abbildung ist *affin*, wenn sie mit allen Affinkombinationen verträglich ist. Zeigen Sie, daß sich jede affine Abbildung als Summe einer linearen Abbildung und einer konstanten Abbildung darstellen läßt.

8. Ein affiner Unterraum, ist eine Teilmenge, welche gegenüber allen Affinkombinationen abgeschlossen ist. Wie ist hier der Zusammenhang mit den linearen Unterräumen?

   eine bijektive lineare Abbildung (d.h. einen Isomorphismus) zwischen diesen beiden Vektorräumen.

9. Es sei $\{ \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \}$ eine Basis des Vektorraums V und $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{b}_k$. Ist auch $\{ \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{v} \}$ eine Basis?

10. $D_{\varphi_1}, D_{\varphi_2}$ seien Drehungen. Bestimmen Sie $D_{\varphi_1} \circ D_{\varphi_2}$. Gilt $D_{\varphi_1} \circ D_{\varphi_2} = D_{\varphi_2} \circ D_{\varphi_1}$? Bestimmen Sie die Abbildungmatrix von $D_{\varphi_1} \circ D_{\varphi_2}$ und vergleichen Sie diese mit der von $D_{\varphi_1+\varphi_2}$.

    Rechnen Sie auch hier zumindest ein Beispiel mit zwei konkreten Winkeln.

11. Die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung h sei

$$h_{B;C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

    Bestimmen Sie $h(\mathbf{v})$, wobei $\mathbf{v}$ gegeben ist durch

$$(\mathbf{v})_B = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

12. Gegeben sei eine Ebene im Raum. Wir legen den Nullpunkt so fest, daß er in der Ebene liegt; und eine Basis, so daß zwei der Vektoren die Ebene aufspannen und der dritte im rechten Winkel darauf steht. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix einer Spiegelung an dieser Ebene.