

Mathematik und Logik

5. Übungsaufgaben

2006-11-21

1. Beweisen Sie, daß die Aussage

$$\neg\neg\neg A \implies \neg A$$

allgemeingültig ist.

2. Beweisen Sie, daß die Aussage

$$A \vee \neg A \implies (\neg\neg A \implies A)$$

allgemeingültig ist.

3. Beweisen Sie, daß die Aussage

$$\neg\neg(A \vee \neg A)$$

allgemeingültig ist.

4. Versuchen Sie das Gesetz von Pierce

$$((A \implies B) \implies A) \implies A$$

mit den bekannten Regeln zu beweisen. Verwenden Sie dann eine Wahrheitstafel.

5. Beweisen Sie das Assoziativgesetz für die Addition natürlicher Zahlen.

6. Zeigen Sie $\neg(0 = 1)$.

7. Zeigen Sie, daß die Multiplikation von natürlichen Zahlen, definiert durch

$$\begin{aligned} 0 \cdot m &= 0, \\ (Sn) \cdot m &= n \cdot m + m, \end{aligned}$$

assoziativ und kommutativ ist.

8. Formulieren und beweisen Sie die üblichen Potenzgesetze.

9. Zeigen Sie, daß gilt

$$\forall_{n:\mathbb{N}} \forall_{m:\mathbb{N}} n = m \vee \neg(n = m).$$

10. Prüfen Sie nach, daß die Addition von ganzen Zahlen, definiert durch

$$(a - b) + (c - d) := (a + c) - (b + d),$$

wohldefiniert ist. (Die ganzen Zahlen seien durch einen Konstruktor $- : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ und $a - b = c - d : \iff a + d = c + b$ definiert.)