

Mathematik und Logik

Franz Binder

Institut für Algebra
Johannes Kepler Universität Linz

Vorlesung im 2006W

<http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/Win/ml>

Inhalt

Prädikatenlogik

Allquantor, \forall

Existenzquantor, \exists

Allquantor, \forall

- ▶ Sei X ein Datentyp, und $P[x]$ für jedes $x: X$ eine Aussage. Dann bezeichnet $\forall_{x: X} P[x]$ eine **All-Aussage**.
- ▶ Die All-Aussage drückt eine universelle Quantifizierung aus.
- ▶ Ein Beweis von $\forall_{x: X} P[x]$ konstruiert für jedes beliebige $x: X$ einen Beweis von $P[x]$.
- ▶ Praktisch: Es sei $\forall_{x: X} P[x]$ zu beweisen.
Vorgangsweise: Annahme $x: X$; beweise $P[x]$.
- ▶ Hängt $P[x]$ nicht von x ab, dann liegt eine normale Implikation vor: $\forall_{x: X} P$ ist dasselbe wie $X \rightarrow P$.

Allquantor, Introduction und Elimination

- ▶ Um $\forall_{x: X} P[x]$ zu beweisen, muß man $P[x]$ für ein beliebiges $x: X$ beweisen.

- ▶ \forall -Introduction:

$$\frac{\begin{array}{c} x: X \\ \boxed{\vdots} \\ P[x] \end{array}}{\forall_{x: X} P[x]} \forall I$$

- ▶ Wurde $\forall_{x: X} P[x]$ bewiesen, und ist $a: X$, dann hat man einen Beweis von $P[a]$.

- ▶ \forall -Elimination:

$$\frac{\forall_{x: X} P[x] \quad a: X}{P[a]} \forall E$$

Allquantor, Beispiel

$$\begin{array}{c}
 \forall x: X A[x] \vee \forall y: Y B[y] \\
 \boxed{\begin{array}{c} x: X \\ \boxed{\begin{array}{c} y: Y \\ \boxed{\begin{array}{c} \vdots \\ A[x] \vee B[y] \end{array} \forall \mathcal{I} \\ \forall y: Y (A[x] \vee B[y]) \end{array} \forall \mathcal{I} \\ \forall x: X \forall y: Y (A[x] \vee B[y]) \end{array} \forall \mathcal{I} \\
 \hline
 \forall x: X A[x] \vee \forall y: Y B[y] \implies \forall x: X \forall y: Y (A[x] \vee B[y]) \Rightarrow \mathcal{I}
 \end{array}$$

Allquantor: Beispiel (Fortsetzung)

Annahmen: $\forall x: X A[x] \vee \forall y: Y B[y]$, $x: X$, $y: Y$
 Zu beweisen:

$$\frac{\begin{array}{c} \forall x: X A[x] \\ \boxed{\begin{array}{c} \vdots \\ A[x] \vee B[y] \end{array}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \forall y: Y B[y] \\ \boxed{\begin{array}{c} \vdots \\ A[x] \vee B[y] \end{array}} \end{array}}{\forall x: X A[x] \vee \forall y: Y B[y] \Rightarrow A[x] \vee B[y]} \forall \mathcal{E}$$

Die beiden Fälle:

$$\frac{\frac{\forall x: X A[x] \quad x: X}{A[x]} \forall \mathcal{E}}{A[x] \vee B[y]} \forall \mathcal{I}_0$$

$$\frac{\frac{\forall y: Y B[y] \quad y: Y}{B[y]} \forall \mathcal{E}}{A[x] \vee B[y]} \forall \mathcal{I}_1$$

Existenzquantor, \exists

- ▶ Sei X ein Datentyp, und $P[x]$ für jedes $x: X$ eine Aussage. Dann bezeichnet $\exists_{x: X} P[x]$ eine **Existenz-Aussage**.
- ▶ Die Existenzaussage drückt eine existenzielle Quantifizierung aus.
- ▶ Ein Beweis von $\exists_{x: X} P[x]$ konstruiert ein $a: X$ und einen Beweis von $P[a]$.
- ▶ Praktisch: Es sei $\exists_{x: X} P[x]$ zu beweisen.
Vorgangsweise: Man wählt ein passendes $a: X$, und versucht damit $P[a]$ zu beweisen.
- ▶ Hängt $P[x]$ nicht von x ab, dann liegt eine normale Konjunktion vor: $\exists_{x: X} P$ ist dasselbe wie $X \wedge P$.

Existenzquantor: Einführung und Elimination

- ▶ Um $\exists_{x: X} P[x]$ zu beweisen, muß man ein $a: X$ finden und damit $P[a]$ beweisen.
- ▶ \exists -Einführung:
$$\frac{a: X \quad P[a]}{\exists_{x: X} P[x]} \exists\mathcal{I}$$
- ▶ Wurde $\exists_{x: X} P[x]$ bewiesen, so kann man für's weitere annehmen, daß es ein solches Objekt gibt.
- ▶ \exists -Elimination:

$$\frac{\exists_{x: X} P[x] \quad \begin{array}{c} y: X \quad P[y] \\ \boxed{\vdots} \\ Q \end{array}}{Q} \exists\mathcal{E}$$