Mathematik und Logik

7. Übungsaufgaben

2006-01-24, Lösungen

1. Zeigen Sie die logische Äquivalenz
$$(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A).$$
   Für welche Richtung ist die Regel *Reductio ad Absurdum* notwendig?

   Lösung: Die Richtung von links nach rechts gilt auch ohne *Reductio ad Absurdum*: Dreimalige Anwendung einer Implikations-Introduktion führt zu: Annahmen: $A \implies B$, $\neg B$, A; zu zeigen: $\perp$.
   Zweimalige Anwendung der Implikations-Elimination führt zum Ziel.

   Die andere Richtung benötigt der Regel *Reductio ad Absurdum*. Sie kann etwa mit einer Wahrheitstabelle oder durch Anwenden der Gleichungen für Boolsche Algebra überprüft werden, oder man zeigt $(\neg B \implies \neg A) \implies (\neg\neg A \implies \neg\neg B)$, was ja in Boolscher Logik dasselbe ist. Man beachte, daß letzteres sogar ein Spezialfall der Richtung von links nach rechts ist (mit $\neg B$ für A und $\neg A$ für B).

2. Welche folgenden logischen Formeln der Boolschen Aussagenlogik sind allgemeingültig, unerfüllbar oder nur für bestimmte (welche?) Wahrheitsbelegungen erfüllt?

   - $P \wedge \neg(Q \vee P)$;
     Lösung: Unerfüllbar.
   - $P \vee \neg(Q \vee P)$;
     Lösung: Erfüllbar, und zwar genau dann, wenn $Q \implies P$ erfüllt ist.
   - $P \implies \neg(Q \vee P)$.
     Lösung: Erfüllbar, und zwar genau dann, wenn P falsch ist.
   - $\neg P \implies \neg(Q \wedge P)$.
     Lösung: Allgemeingültig.

3. Vereinfachen Sie die folgenden Formeln der Boolschen Algebra:

- $(A \implies B) \wedge (A \implies \neg B)$;
  Lösung: $\neg A$. (Nur wenn A falsch ist, kann ein Widerspruch folgen)
- $(a \vee b) \wedge \neg a$;
  Lösung: $b \wedge \neg a$.
- $(a \implies b) \wedge \neg b$.
  Lösung: $\neg a \wedge \neg b$.

4. Zeigen Sie

$$\bigvee_{x\colon X} P[x] \iff \neg \bigwedge_{x\colon X} \neg P[x].$$

   Für welche der beiden Richtungen ist die Regel *Reductio ad Absurdum* notwendig?

   Lösung: Für die Richtung von links nach rechts verwenden wir zweimal $\Rightarrow\mathcal{I}$, und gelangen zur Beweissituation:
   Annahmen: $\bigvee_{x\colon X} P[x]$, $\bigwedge_{x\colon X} \neg P[x]$;
   zu zeigen: $\perp$.
   Eine $\exists\mathcal{I}$ liefert die weiteren Annahmen $x\colon X$, $P[x]$. (Man beachte, daß dies ein neues x ist, das weder mit dem im Existenzquantor noch mit dem im Allquantor etwas zu tun hat.) Mit einer $\forall\mathcal{I}$ setzen wir nun dieses neue x in die Allaussage ein, und erhalten somit $\neg P[x]$. Zusammen mit der Annahme $P[x]$ von oben, ergibt sich somit $\perp$.

   Für die Umkehrung zeigen wir am besten:

$$\neg \bigvee_{x\colon X} P[x] \implies \bigwedge_{x\colon X} \neg P[x],$$

   was gemäß Beispiel 1 dasselbe ist. Gemäß einer $\Rightarrow\mathcal{I}$ nehmen wir also $\neg \bigvee_{x\colon X} P[x]$ an, und versuchen daraus $\bigwedge_{x\colon X} \neg P[x]$ herzuleiten. Dazu bietet sich eine $\forall\mathcal{I}$ an. Sei also ein neues $x\colon X$ gegeben, mit $\neg P[x]$. Dieses liefert dann aber einen Beweis von $\bigvee_{x\colon X} P[x]$, was zusammen mit der ersten Annahme einen Widerspruch liefert.

5. Bringen Sie $a \wedge (b \vee \neg(a \implies c))$ auf disjunktive Normalform.

   Lösung: Mittels Wahrheitstafel, Boolschem Ausmultiplizieren oder anderen Überlegungen landet man (bis auf die Reihenfolge) bei

$$(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

   .

6. Die Funktion $f\colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ sei durch die folgende Tabelle gegeben:

x	y	z	$f(x,y,z)$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Stellen Sie $f(x,y,z)$ mittels logischer Junktoren als symbolischen Ausdruck dar.

Lösung: Direktes Ablesen: $(\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z)$.

7. Auf $\mathbb{B}^2 = \mathbb{B} \times \mathbb{B}$ definieren wir die boolschen Operationen komponentenweise, also z.B.

$$(x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2) = (x_1 \wedge y_1,\ x_2 \wedge y_2)$$

Zeigen Sie, daß damit auf $\mathbb{B}^2$ ebenfalls eine Boolsche Algebra definiert wird.

Lösung: Beispiel: Kommutativität:

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2) &= (x_1 \wedge y_1,\ x_2 \wedge y_2) && \text{(Definition)}\\
&= (y_1 \wedge x_1,\ y_2 \wedge x_2) && \text{(Kommutativität in } \mathbb{B})\\
&= (y_1, y_2) \wedge (x_1, x_2) && \text{(Definition).}
\end{aligned}$$

8. Für die Menge $X \to \mathbb{B}$ definieren wir die boolschen Operationen punktweise, z.B.

$$(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x).$$

Entsteht auch hier eine Boolsche Algebra?

Lösung: Beispiel: Kommutativität: Wir sollten zeigen: $f \wedge g = g \wedge f$, für beliebige $f, g\colon X \to \mathbb{B}$. Gemäß Extensionalität muß dazu $(f \wedge g)(x) = (g \wedge f)(x)$ für jedes $x\colon X$ gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
(f \wedge g)(x) &= f(x) \wedge g(x) && \text{(Definition)}\\
&= g(x) \wedge f(x) && \text{(Kommutativität in } \mathbb{B})\\
&= (g \wedge f)(x) && \text{(Definition);}
\end{aligned}$$

9. Bildet die Potenzmenge einer Menge eine Boolsche Algebra?

   Lösung: Mit *reduction ad absurdum* (und nur dann) entspricht die Potenzmenge exakt den Funktionen nach $\mathbb{B}$ und ist daher, so wie diese, eine Boolsche Algebra.