

Mathematik und Logik

7. Übungsaufgaben

2006-01-24

1. Zeigen Sie die logische Äquivalenz

$$(A \implies B) \iff (\neg A \implies \neg B).$$

Für welche Richtung ist die Regel *Reduction ad Absurdum* notwendig?

2. Welche folgenden logischen Formeln der Booleschen Aussagenlogik sind allgemeingültig, unerfüllbar oder nur für bestimmte (welche?) Wahrheitsbelegungen erfüllt?

- $P \wedge \neg(Q \vee P)$;
- $P \vee \neg(Q \vee P)$;
- $P \implies \neg(Q \vee P)$.
- $\neg P \implies \neg(Q \wedge P)$.

3. Vereinfachen Sie die folgenden Formeln der Booleschen Algebra:

- $(A \implies B) \wedge (A \implies \neg B)$;
- $(a \vee b) \wedge \neg a$;
- $(a \implies b) \wedge \neg b$.

4. Zeigen Sie

$$\bigvee_{x: X} P[x] \iff \neg \bigwedge_{x: X} \neg P[x].$$

Für welche der beiden Richtungen ist die Regel *Reductio ad Absurdum* notwendig?

5. Bringen Sie $a \wedge (b \vee \neg(a \implies c))$ auf disjunktive Normalform.

6. Die Funktion $f: \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$ sei durch die folgende Tabelle gegeben:

x	y	z	$f(x, y, z)$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Stellen Sie $f(x, y, z)$ mittels logischer Junktoren als symbolischen Ausdruck dar.

7. Auf $\mathbb{B}^2 = \mathbb{B} \times \mathbb{B}$ definieren wir die boolschen Operationen komponentenweise, also z.B.

$$(x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2)$$

Zeigen Sie, daß damit auf $\mathbb{B}^2$ ebenfalls eine Boolsche Algebra definiert wird (d.h., es gelten die Assoziativ-, Kommutativ-, Distributiv- und De-Morgan-Gesetze).

8. Für die Menge $X \rightarrow \mathbb{B}$ definieren wir die boolschen Operationen punktweise, z.B.

$$(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$$

Entsteht auch hier eine Boolsche Algebra?

9. Bildet die Potenzmenge einer Menge eine Boolsche Algebra?