

Mathematik und Logik

4. Übungsaufgaben

2005-12-13

1. Beweisen Sie, daß die Listenverkettung assoziativ ist.
2. Beweisen Sie, daß $(a \triangleleft m) \triangleright e = a \triangleleft (m \triangleright e)$. Inwiefern handelt es sich hier um einen Spezialfall des vorigen Beispiels.
3. Beweisen Sie, daß $|\text{reverse } \ell| = |\ell|$.
4. Beweisen Sie $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$.
5. Beweisen Sie $f^*(\ell \diamond r) = f^*\ell \diamond f^*r$.
6. Überlegen Sie sich, daß $\text{rec } S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tatsächlich die normale Addition von natürlichen Zahlen ist, etwa indem Sie einige elementare Eigenschaften beweisen.
7. Beweisen Sie, daß $\text{length}: A^* \rightarrow \mathbb{N}$ ein Homomorphismus ist, d.h. daß $|u \diamond v| = |u| + |v|$.
8. Beweisen Sie, mittels Induktion nach n , daß

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

9. Eine Liste ist eine arithmetische Folge, wenn die Differenz zweier aufeinanderfolgender Elemente konstant ist. Definieren Sie diese Eigenschaft formal.
10. Sei a das erste und e das letzte Element einer arithmetischen Folge ℓ . Zeigen Sie, daß dann

$$\sum \ell = \frac{|\ell| \cdot (a + e)}{2}.$$

Was genau passiert, wenn ℓ leer ist.