Mathematik und Logik

3. Übungsaufgaben

2005-11-22

1. Beweisen Sie

$$\bigvee_{x: X} (A[x] \wedge B[x]) \implies \bigvee_{x: X} A[x] \wedge \bigvee_{x: X} B[x].$$

2. Gilt im vorigen Beispiel auch die Umkehrung?
3. Überlegen Sie sich, welcher Datentyp den Beweisen von Existenzaussagen entspricht.
4. Wir definieren die folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} I &= x \mapsto x, \\ K &= x \mapsto y \mapsto x, \\ S &= x \mapsto y \mapsto z \mapsto (xz)(yz). \end{aligned}$$

Zeigen Sie dann, daß gilt:

$$SKK = I.$$

5. Können Sie den „Funktionen“ I, K, S aus dem obigen Beispiel die richtige Datentypen (Definitions- und Bildbereiche) so zuordnen, daß sie tatsächlich zusammenpassen?
6. Für Paare natürlicher Zahlen definieren wir die folgende Relation:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c.$$

Was ist konkret nachzurechnen, um zu beweisen, daß dies eine Äquivalenzrelation ist?

7. Unser Ziel sei es, zu zeigen, daß für alle natürlichen Zahlen m gilt:

$$0 = Sm \implies 0 = S0.$$

Der Beweis sollte nur die elementarsten Eigenschaften der natürlichen Zahlen verwenden. Es bietet sich ein Induktionsbeweis ($\mathbb{N}\mathcal{E}$) an. Welche beiden Aussagen müssen zu diesem Zweck bewiesen werden.

8. Versuchen Sie, den Beweis im vorigen Beispiel so weit wie möglich zu vollenden.