Mathematik und Logik

Franz Binder

Institut für Algebra
Johannes Kepler Universität Linz

Vorlesung im 2005W
http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/Win/ml05w

Inhalt

Definition der Implikation, $\Rightarrow$

Formation
Sind P und Q Aussagen, dann bezeichnet $P \Rightarrow Q$ ebenfalls eine Aussage, die Implikation von P und Q.

Introduktion
Um $P \Rightarrow Q$ zu beweisen, muß man Q beweisen, wobei man einen Beweis von P voraussetzen darf.

Elimination
Hat man einen Beweis von $P \Rightarrow Q$, so reicht ein Beweis von P, um auch eine Beweis von Q zu beweisen.

Schlußregeln

$$\frac{\begin{array}{c} P \\ \boxed{\begin{array}{c} \vdots \\ Q \end{array}} \end{array}}{P \Rightarrow Q}{\Rightarrow}\mathcal{I} \qquad\qquad \frac{P \Rightarrow Q \quad P}{Q}{\Rightarrow}\mathcal{E}$$

Definition der Konjuktion, $\wedge$

Formation
Sind P und Q Aussagen, dann bezeichnet $P \wedge Q$ ebenfalls eine Aussage, die Konjunktion von P und Q.

Introduktion
Um $P \wedge Q$ zu beweisen, muß man sowohl P als auch Q beweisen.

Elimination
Hat man eine Beweis von $P \wedge Q$ so auch Beweis von P, und auch von Q.

Schlußregeln

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}{\wedge}\mathcal{I} \qquad \frac{P \wedge Q}{P}{\wedge}\mathcal{E}_0 \qquad \frac{P \wedge Q}{Q}{\wedge}\mathcal{E}_1$$

Kommutativität der Konjuktion

Satz

Die logische Konjunktion ist kommutativ, d.h. die Aussage

$$A \wedge B \implies B \wedge A$$

ist allgemeingültig.

Beweis.

$$\dfrac{\begin{array}{c} A \wedge B \\ \boxed{\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}\wedge\mathcal{E}_1 \qquad \dfrac{A \wedge B}{A}\wedge\mathcal{E}_0}{B \wedge A}\wedge\mathcal{I}} \end{array}}{A \wedge B \implies B \wedge A}\Rightarrow\mathcal{I}$$

$\square$

Definition der Äquivalenz, $\iff$

Notation

Die logische Äquivalenz wird mit $P \iff Q$ bezeichnet und ist lediglich eine Abkürzung für $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Satz

Die logische Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation, d.h. es gelten

- Reflexivität *$A \iff A$;*
- Symmetrie *Wenn $A \iff B$, dann auch $B \iff A$;*
- Transitivität *Wenn $A \iff B$ und $B \iff C$, dann auch $A \iff C$.*

Bemerkung

Zwei Aussagen sind äquivalent wenn sie vom logischen Standpunkt aus betrachtet gleichwertig sind.

Definition der Disjunktion, $\vee$

Formation

Sind P und Q Aussagen, dann bezeichnet $P \vee Q$ ebenfalls eine Aussage, die Disjunktion von P und Q.

Introduktion

Um $P \vee Q$ zu beweisen, genügt es, P zu beweisen, oder Q zu beweisen.

Elimination

Hat man einen Beweis von $P \vee Q$, dann kann man jede weitere Aussage R durch Fallunterscheidung beweisen, d.h. unter der Voraussetzung P, und unter Q.

Schlußregeln

$$\frac{P}{P \vee Q}\vee\mathcal{I}_0 \qquad \frac{Q}{P \vee Q}\vee\mathcal{I}_1 \qquad \frac{P \Rightarrow R \quad Q \Rightarrow R \quad P \vee Q}{R}\vee\mathcal{E}$$