Mathematik und Logik

Franz Binder

Institut für Algebra
Johannes Kepler Universität Linz

Vorlesung im 2005W
http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/Win/ml05w

Inhalt

Allquantor, $\forall$

- Sei X ein Datentyp, und $P[x]$ für jedes $x\colon X$ eine Aussage. Dann bezeichnet $\forall_{x\colon X} P[x]$ eine All-Aussage.
- Die All-Aussage drückt eine universelle Quantifizierung aus.
- Ein Beweis von $\forall_{x\colon X} P[x]$ konstruiert für jedes beliebige $x\colon X$ einen Beweis von $P[x]$.
- Praktisch: Es sei $\forall_{x\colon X} P[x]$ zu beweisen.
  Vorgangsweise: Annahme $x\colon X$; beweise $P[x]$.
- Hängt $P[x]$ nicht von x ab, dann liegt eine normale Implikation vor: $\forall_{x\colon X} P$ ist dasselbe wie $X \to P$.

Allquantor, Introduktion und Elimination

- Um $\forall_{x\colon X} P[x]$ zu beweisen, muß man $P[x]$ für ein beliebiges $x\colon X$ beweisen.
- $\forall$-Introduktion:

$$\dfrac{\begin{array}{c} x\colon X \\ \boxed{\begin{array}{c} \vdots \\ P[x] \end{array}} \end{array}}{\forall_{x\colon X} P[x]}\forall\mathcal{I}$$

- Wurde $\forall_{x\colon X} P[x]$ bewiesen, und ist $a\colon X$, dann hat man einen Beweis von $P[a]$.
- $\forall$-Elimination:

$$\dfrac{\forall_{x\colon X} P[x] \quad a\colon X}{P[a]}\forall\mathcal{E}$$

Allquantor, Beispiel

$$
\dfrac{\begin{array}{c}
\forall_{x:\,X} A[x] \lor \forall_{y:\,Y} B[y] \\
\boxed{\dfrac{\begin{array}{c}
x:\, X \\
\boxed{\dfrac{\begin{array}{c}
y:\, Y \\
\boxed{\begin{array}{c} \vdots \\ A[x] \lor B[y] \end{array}}
\end{array}}{\forall_{y:\,Y}(A[x] \lor B[y])}\,\forall\mathcal{I}}
\end{array}}{\forall_{x:\,X}\forall_{y:\,Y}(A[x] \lor B[y])}\,\forall\mathcal{I}}
\end{array}}{\forall_{x:\,X} A[x] \lor \forall_{y:\,Y} B[y] \implies \forall_{x:\,X}\forall_{y:\,Y}(A[x] \lor B[y])}\,\Rightarrow\mathcal{I}
$$

Allquantor: Beispiel (Fortsetzung)

Annahmen: $\forall_{x:\,X} A[x] \lor \forall_{y:\,Y} B[y], \qquad x:\, X, \quad y:\, Y$
Zu beweisen:

$$
\dfrac{\begin{array}{cc}
\forall_{x:\,X} A[x] & \forall_{y:\,Y} B[y] \\
\boxed{\begin{array}{c} \vdots \\ A[x] \lor B[y] \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} \vdots \\ A[x] \lor B[y] \end{array}}
\end{array}}{\forall_{x:\,X} A[x] \lor \forall_{y:\,Y} B[y] \Rightarrow A[x] \lor B[y]}\,\lor\mathcal{E}
$$

Die beiden Fälle:

$$
\dfrac{\dfrac{\forall_{x:\,X} A[x] \quad x:\, X}{A[x]}\,\forall\mathcal{E}}{A[x] \lor B[y]}\,\lor\mathcal{I}_0
\qquad\qquad
\dfrac{\dfrac{\forall_{y:\,Y} B[y] \quad y:\, Y}{B[y]}\,\forall\mathcal{E}}{A[x] \lor B[y]}\,\lor\mathcal{I}_1
$$

- Sei X ein Datentyp, und $P[x]$ für jedes $x\colon X$ eine Aussage. Dann bezeichnet $\exists_{x\colon X} P[x]$ eine Existenz-Aussage.
- Die Existenzaussage drückt eine existenzielle Quantifizierung aus.
- Ein Beweis von $\exists_{x\colon X} P[x]$ konstruiert ein $a\colon X$ und einen Beweis von $P[a]$.
- Praktisch: Es sei $\exists_{x\colon X} P[x]$ zu beweisen.
  Vorgangsweise: Man wählt ein passendes $a\colon X$, und versucht damit $P[a]$ zu beweisen.
- Hängt $P[x]$ nicht von x ab, dann liegt eine normale Konjunktion vor: $\exists_{x\colon X} P$ ist dasselbe wie $X \wedge P$.

Existenzquantor: Introduktion und Elimination

- Um $\exists_{x\colon X} P[x]$ zu beweisen, muß man ein $a\colon X$ finden und damit $P[a]$ beweisen.
- $\exists$-Introduktion: $$\frac{a\colon X \quad P[a]}{\exists_{x\colon X} P[x]}\exists\mathcal{I}$$
- Wurde $\exists_{x\colon X} P[x]$ bewiesen, so kann man für's weitere annehmen, daß es ein soches Objekt gibt.
- $\exists$-Elimination:

$$\frac{\exists_{x\colon X} P[x] \qquad \begin{array}{c} y\colon X \quad P[y] \\ \boxed{\begin{array}{c} \vdots \\ Q \end{array}} \end{array}}{Q}\exists\mathcal{E}$$