Graphentheorie

Formale Grundlagen (WIN)

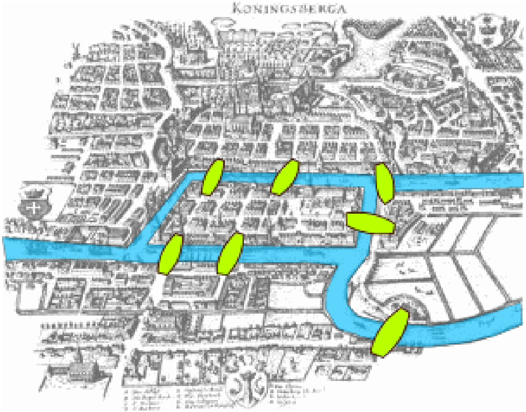
2008S, F. Binder

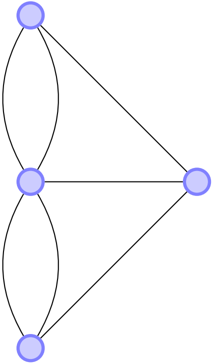
Franz Binder
Institut für Algebra
Johannes Kepler Universität Linz

Vorlesung im 2008S
http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/Win/fg

Inhalt

Königsberger Brückenproblem

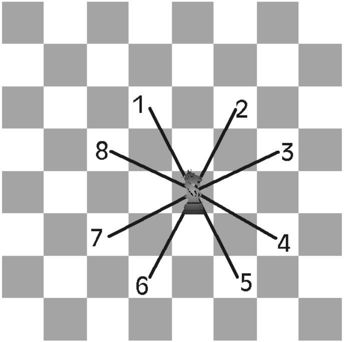


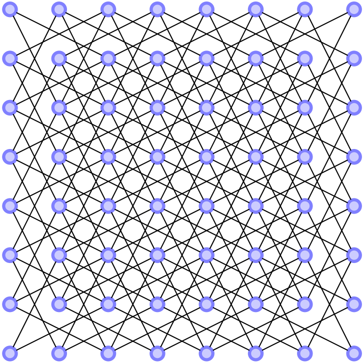


Gibt es einen Spaziergang, der jede Brücke genau einmal benutzt?

Ist dies ein Eulergraph?

Springerproblem





Ist es möglich, mit dem Springer jedes Feld des Schachbrettes genau einmal zu besuchen?

Enthält dieser Graph einen Hamiltonschen Kreis?

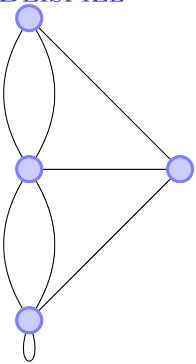
Knoten und Kanten

Definition

Ein Graph $\mathcal{G}$ enthält

- eine Menge V von Knoten,
- zu je zwei Knoten $\{a, b\} \subseteq V$, eine Menge $\mathcal{G}(a, b)$ von Kanten.

Beispiel



Definition

- Gibt es zwischen zwei Knoten mehr als eine Kante, dann spricht man von einer Mehrfachkante, bestehend aus mehreren parallelen Kanten.
- Eine Kante, die einen Knoten mit sich selbst verbindet, nennt man eine Schlinge.
- Ein Graph ohne Mehrfachkanten und Schlingen heißt schlicht.

Knotengrad

Definition

Der Grad $d(a)$ eines Knoten a in einem Graphen ist die Anzahl der zu a inzidenten Kanten, wobei Schlingen doppelt zu zählen sind.

Bemerkung

Es gilt: $d(a) = \sum_b |\mathcal{G}(a, b)| + |\mathcal{G}(a, a)|$.

Satz

In einem Graphen mit m Kanten gilt: $2 \cdot m = \sum_a d(a)$.

Folgerung

Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.

Satz

Ist i ein Graphen-Isomorphismus, dann ist $d(a) = d(i(a))$.

Definition

Ein Graph heißt regulär wenn alle Knoten denselben Grad haben.

Folgerung

In einem regulären Graphen vom Grad r mit n Knoten und m Kanten gilt: $2 \cdot m = n \cdot r$.

Graphen-Homomorphismus

Definition

Seien $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ zwei Graphen. Ein Homomorphismus $h : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ enthält

- eine Funktion $h_0 : V_1 \to V_2$ zwischen den Knotenmengen,
- zu je zwei Knoten a, b, eine Funktion $h_{a,b} : \mathcal{G}_1(a, b) \to \mathcal{G}_2(h_0(a), h_0(b))$ zwischen den entsprechenden Kantenmengen.

Bemerkung

Ein Graphen-Homomorphismus erhält die Verbindungsstruktur eines Graphen, nicht aber zusätzliche Informationen wie Lage der Knoten oder Form der Kanten.

Bemerkung

Ein Homomorphismus h zwischen zwei Graphen ohne Mehrfachkanten ist einfach eine Funktion zwischen den Knotenmengen, sodaß gilt: Wenn a, b benachbart sind, dann auch $h(a), h(b)$.

Graphen-Isomorphismus

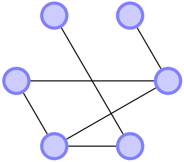
Definition

Ein Graphen-Isomorphismus ist ein invertierbarer Graphen-Homomorphismus.
D.h. ein Graphen-Homomorphismus $h : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ ist ein Isomorphismus, wenn es einen Graphen-Homomorphismus $h' : \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_1$ gibt, sodaß h_0 und h'_0 zueinander inverse Abbildungen sind, und auch für alle Knoten a, b die Abbildungen $h_{a,b}$ und $h'_{a,b}$ zueinander invers sind.

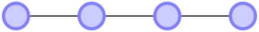
Bemerkung

- Ein Isomorphismus h zwischen zwei Graphen ohne Mehrfachkanten ist eine bijektive Abbildung zwischen den Knotenmengen, sodaß zwei Knoten a, b genau dann verbunden sind, wenn $h(a)$ und $h(b)$ verbunden sind.
- Bei Mehrfachkanten muß entsprechend die Anzahl der Kanten gleich bleiben.

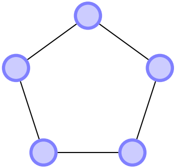
Automorphismengruppe



Asymmetrisch



$\operatorname{Aut}\mathcal{G} \simeq \mathbb{Z}_2$



Knoten-transitiv

Definition

Die Menge aller Automorphismen eines Graphen $\mathcal{G}$ (Isomorphismen $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$) bildet mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}\mathcal{G}$.

Definition

- Ist $\operatorname{Aut}\mathcal{G} = \{\,\mathrm{id}\,\}$, dann ist $\mathcal{G}$ asymmetrisch.
- Gilt für zwei Knoten $\alpha(u) = v$, mit $\alpha \in \operatorname{Aut}\mathcal{G}$, dann sind u und v im Graphen gleichwertig.
- Sind alle Knoten gleichwertig, dann heißt der Graph transitiv.

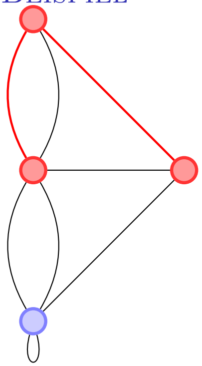
Teilgraphen

Definition

Ein Graph $\mathcal{H}$ heißt Teilgraph eines Graphen $\mathcal{G}$, wenn

- die Knoten von $\mathcal{H}$ eine Teilmenge der Knoten von $\mathcal{G}$ bilden,
- für alle Knoten a, b von $\mathcal{H}$ ist $\mathcal{H}(a,b) \subseteq \mathcal{G}(a,b)$.

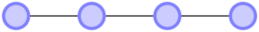
Beispiel

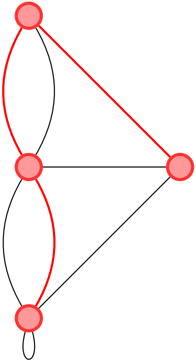


Bemerkung

- Das Bild eines Graphen-Homomorphismus $h : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ ist ein Teilgraph.
- Ist dieser injektiv (Knoten- und Kantenteil), so sind $\mathcal{H}$ und das Bild $h(\mathcal{G})$ isomorph.
- Man sagt dann, $\mathcal{H}$ wird durch h in $\mathcal{H}$ eingebettet.

Weg





Definition

Ein Weg ist ein Graph, dessen Knoten sich so ordnen lassen, daß jeder mit dem nächsten verbunden ist, und der ansonsten keine Kanten besitzt.
Der Weg mit n Kanten wird mit P^n bezeichnet.
Ein Weg der Länge n in einem Graphen ist ein Teilgraph, der isomorph zu P^n ist.

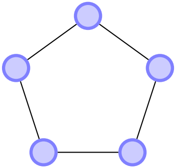
Bemerkung

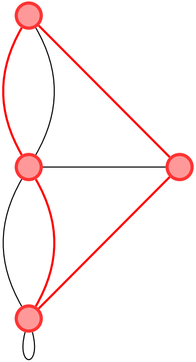
Zwei Wege sind genau dann isomorph wenn sie gleich viele Kanten haben.

Bemerkung

Die Endknoten eines Weges haben nur einen Nachbarn, während die inneren Knoten stets zwei Nachbarn haben.

Kreis





Definition

Ein Kreis ist ein Graph, der entsteht, wenn in einem Weg eine zusätzliche Kante eingefügt wird, die dessen Endknoten verbindet. Der Kreis mit n Kanten wird mit C^n bezeichnet.
Ein Kreis der Länge n in einem Graphen ist ein Teilgraph, der isomorph zu C^n ist.

Bemerkung

Zwei Kreise sind genau dann isomorph wenn sie gleich viele Kanten haben.

Bemerkung

Alle Knoten eines Kreises haben exakt zwei Nachbarn. Es gibt keine spezillen Endknoten, alle Knoten sind gleichberechtigt.

Hamiltonsche Graphen

Definition

Ein Graph der einen Kreis enthält, der alle Knoten umfaßt heißt ein Hamiltonscher Graph.

Theorem

Das Problem, zu entscheiden ob ein beliebiger gegebener Graph Hamiltonsch ist, ist NP-vollständig.

Zusammenhang

Definition

Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn er das homomorphe Bild eines Weges ist.

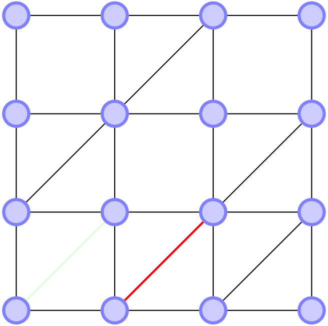
Satz

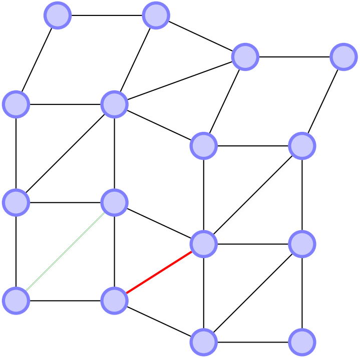
Ein nicht-leerer Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn je zwei Knoten stets durch einen Weg verbunden werden können.

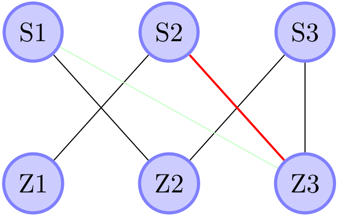
Satz

Verbindbarkeit durch einen Weg ist eine Äquivalenzrelation. Ihre Äquivalenzklassen zerlegen den Graphen in Zusammenhangskomponenten.

Bewegliche und stabile Rahmen







Stabil $\iff$ zusammenhängend.

Gesucht daher: Spannbaum im Graphen aller möglichen Verstebungen

Baum und Wald

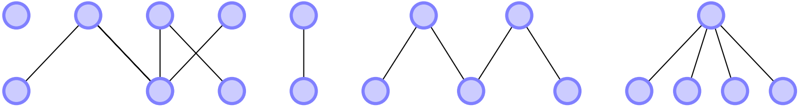
Definition

- Ein Wald ist ein Graph, der keinen Kreis enthält.
- Ein Baum ist ein zusammenhängender Wald.

Bemerkung

- Die Zusammenhangskomponenten eines Waldes sind Bäume.
- Ein Wald ist somit eine Menge von Bäumen.

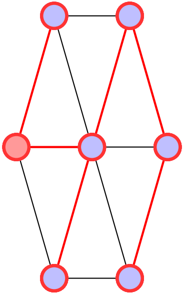
Beispiel



Satz

- *Ein Graph ist genau dann ein Wald, wenn es zwischen je zwei Knoten höchstens einen Weg gibt.*
- *Ein Graph ist genau dann ein Baum, wenn es zwischen je zwei Knoten genau einen Weg gibt.*

Spannbäume



Definition

Ein Teilgraph T eines Graphen $\mathcal{G}$ heißt aufspannend wenn er alle Knoten von $\mathcal{G}$ umfaßt.

Satz

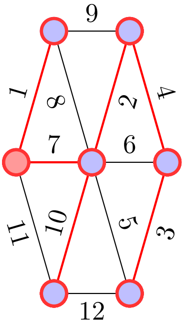
Jeder zusammenhängende Graph enthält einen aufspannenden Baum (Spannbaum).

Beweis.

- Wir beginnen mit irgendeinem Knoten (ohne Kanten) als Teilgraph T (offensichtlich ein Baum).
- Wenn T noch nicht alle Knoten umfaßt, dann gibt es, weil $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist, mindestens einen Nachbarknoten von T.
- Eine Kante zu einem solchen geben wir zu T hinzu und fahren mit diesem erweiterten Baum fort.
- Am Schluß ist T ein Spannbaum.

$\square$

Minimaler Spannbaum



Definition

Ein Teilgraph T eines kantengewichteten Graphen $\mathcal{G}$ heißt minimaler Spannbaum wenn er unter allen Spannbäumen das geringste Gesamtgewicht hat.

Satz

Jeder zusammenhängende Graph enthält einen minimalen Spannbaum, und dieser läßt sich durch einen Greedy-Algorithmus leicht finden.

Beweis.

- Wir beginnen mit irgendeinem Knoten als Teilgraph T.
- Wenn T noch nicht alle Knoten umfaßt, dann gibt es, weil $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist, mindestens einen Nachbarknoten von T.
- Die kleinste passende Kante zu einem solchen geben wir zu T hinzu und fahren mit diesem erweiterten Baum fort.
- Am Schluß ist T ein minimaler Spannbaum.

□

Dijkstra-Verfahren