Formale Grundlagen

2. Übungsaufgaben

bis 2010-04-20, Angaben

Achten Sie bei allen Beispielen besonders auf exakte Formulierung. Vom Inhaltlichen her stellt keiner dieser Beweise hier eine Herausforderung dar.

1. Gegeben sei die Relation
$$R = \{ (1,2), (2,3), (2,4), (5,3), (6,5), (6,3), (7,8), (9,7), (9,10) \}.$$
Stellen Sie R durch einen Graphen (= Pfeildiagramm) dar und bestimmen Sie:
   (a) $R \cap D$ (wobei $x \; D \; y \iff x < y$);
   (b) R^{-1};
   (c) R^2;
   (d) $R \cup R^2$;
   (e) R^3;

   Ist R reflexiv, symmetrisch, transitiv, eine Äquivalenzrelation? Treffen diese Eigenschften für die oben berechneten Relationen zu?

2. Gegeben seien die Mengen $Z = \{ 1,2,3,4,5 \}$ und $L = \{ a,b,c,d,e \}$ sowie die Relationen
$$R = \{ (1,a),\ (1,b),\ (2,a),\ (2,c),\ (4,b),\ (4,c) \},$$
$$S = \{ (a,5),\ (b,3),\ (b,4),\ (c,2) \}.$$
Welchen Typ haben diese Relationen? Stellen Sie beide jeweils als Tabelle und als Graph (Pfeildiagramm) dar. Berechnen Sie die Relationenprodukte $R; S$ und $S; R$. Gilt $R; S = S; R$? Wie ergibt sich das Pfeildiagramm der Relationenprodukte aus den Pfeildiagrammen von R und von S?

3. Sei X die Menge aller zur Zeit lebenden Menschen. Gegeben seien die Relationen V und M in X:
$$x \; V \; y :\iff x \text{ ist Vater von } y,$$
$$x \; M \; y :\iff x \text{ ist Mutter von } y.$$
Drücken Sie die üblichen Verwandtschaftsbeziehungen mit Hilfe von V, M und den Operationen ; (Relationenprodukt) sowie $\cup$ (Vereinigung) aus, insbesondere:
$$x \; GV \; y :\iff x \text{ ist Großvater von } y,$$
$$x \; GEM \; y :\iff x \text{ ist Großelternteil mütterlicherseits von } y.$$

4. In $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei durch

$$(x, y) \approx (u, v) :\Longleftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2$$

eine Relation definiert.

Warum ist dies eine Äquivalenzrelation. Bestimmen alle Paare, die zu $(4, 3)$ äquivalent sind, und stellen Sie diese graphisch dar.

5. Zeigen Sie, daß das Relationenprodukt assoziativ ist.

6. Finden Sie konkrete Relationen R und S, sodaß $R; S = S; R$, und auch welche, sodaß $R; S \neq S; R$.

7. Eine Gruppe muß per definitionem die folgenden Rechengesetze erfüllen:

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ a \cdot 1 = a = 1 \cdot a \\ a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß in jeder Gruppe gilt: $a \cdot b = a \cdot c \implies b = c$.

8. Bekanntlich gibt es zu jeder Relation eine zugehörige inverse Relation, definiert durch

$$x \overset{R}{\to} y \iff y \overset{R^{-1}}{\to} x.$$

Warum ergibt sich dennoch keine Gruppe?

9. Führen Sie die Definition der symmetrischen bzw. transitiven Hülle formal aus.

10. Zeigen Sie: $(R; S)^{-1} = S^{-1}; R^{-1}$.

Gilt dieses Rechengesetz in jeder Gruppe?

11. Zeigen Sie: Eine Relation ist genau dann symmetrisch, wenn sie ihr Inverses umfaßt.

12. Zeigen Sie: Eine Relation ist ganau dann transitiv, wenn sie ihr Quadrat umfaßt.

13. Zeigen Sie: Die symmetrische Hülle einer Relation R ist gegeben durch $R \cup R^{-1}$.

14. Zeigen Sie: Die transitive Hülle einer Relation R ist gegeben durch $R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5 \cup \ldots$.

15. Sei R irgendeine Relation. Zeigen Sie, daß sowohl $R \cup R^{-1}$ als auch $R \cap R^{-1}$ symmetrisch sind.

16. Sei R eine transitive bzw. reflexive Relation. Zeigen Sie, daß dann auch $R \cap R^{-1}$ wieder transitiv bzw. reflexiv sind. Stimmt dies auch für $R \cup R^{-1}$?

17. Warum ist die Kongruenz modulo 5 eine Äquivalenzrelation?

18. Finden Sie eine Formel für die kleinste R umfassende Äquivalenzrelation.

19. Finden Sie eine Relation, welche sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch ist.

20. Zeigen Sie anhand eines konkreten Gegenbeispiels, daß es im allgemeinen keine „lineare Hülle“ (d.h. kleinste die gegebene Ordnung umfassende lineare Ordnung) einer Ordungsrelation gibt.