Formale Grundlagen

1. Übungsaufgaben

bis 2010-03-09, Angaben

Achten Sie bei allen Beispielen besonders auf die exakte Formulierung des zu beweisenden Sachverhaltes (dies ist stets der wichtigere Teil der Übung). Im Beweis selbst sollten Sie auf genaue Regelanwendung achten. Vom Inhaltlichen her stellt keiner dieser Beweise hier eine Herausforderung dar.

1. Wir haben in der Vorlesung gelernt, daß die Disjunktion $A \vee B$ eine möglichst starke Aussage ist, unter der Bedingung, daß sie schwächer als A und auch schwächer als B ist. Formulieren Sie dies exakt und zeigen Sie, daß jede weitere Aussage, die dies erfüllt zu $A \vee B$ äquivalent ist.

2. Die rationalen Zahlen seien, wie in der Vorlesung, als Paare von ganzen Zahlen (mit von 0 verschiedenem Nenner) definiert, wobei dei Gleichheit festgelegt ist durch

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \iff p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1.$$

Rechnen Sie nach, daß dieser Gleichheitsbegriff tatsächlich die Axiome für Äquivalenzrelationen erfüllt:

$$\begin{gathered} x = x \\ x = y \implies y = x \\ x = y \wedge y = z \implies x = z \end{gathered}$$

3. Für Abbildungen $f : A \to B$ und $g : A \to B$ definieren wir

$$f = g \iff \underset{a \epsilon A}{\forall} f(a) = g(a)$$

Zeigen Sie, daß auch dieser Gleichheitsbegriff die Axiome für Äquivalenzrelationen erfüllt.

4. Weiters definieren wir für Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ eine Abbildung $g \circ f : A \to C$ durch

$$(g \circ f)(a) := g(f(a)),$$

die *Hintereinanderausführung von g nach f*. Zeigen Sie, daß $g \circ f$ tatsächlich eine Funktion von A nach C ist, und auch, daß sie wohldefiniert ist.

5. Mit welchem Beweis welcher Aussage steht die Hintereinanderausführung in sehr engem Zusammenhang?

6. Wenn $f = f'$ und $g = g'$, dann sollte auch $g \circ f = g' \circ f'$ sein. Formulieren Sie diesen Sachverhalt exakt und beweisen Sie ihn.

7. Zeigen Sie, daß die Hintereinanderausführung von Abbildungen assoziativ ist.

8. Zu jeder Menge A gibt es die *identische Abbildung* $\mathrm{id}_A : A \to A$ mit $a \mapsto a$. Zeigen Sie, daß für beliebige Mengen B und $f : A \to B$ und $g : B \to A$ gilt:

$$f \circ \mathrm{id}_A = f \quad \text{und} \quad \mathrm{id}_A \circ g = g.$$

   (Die identische Abbildung ist somit ein neutrales Element für die Hintereinanderausführung.)

9. Welchem Beweis welcher Aussage entspricht die identische Abbildung?

10. Sei $i : A \to A$ irgendeine (weitere) Abbildung, sodaß für alle $f : A \to A$ gilt:

$$f \circ i = f = i \circ f.$$

   Zeigen Sie, daß dann $i = \mathrm{id}_A$.

11. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt *invertierbar* wenn es eine Abbildung $g : B \to A$ gibt, sodaß $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Zeigen Sie, daß g damit eindeutig bestimmt ist.

12. Sei $a \in A$. Dann definieren wir die *Evaluation bei A* durch

$$\mathrm{ev}_a(f) := f(a).$$

   Welchen Datentyp hat die Abbildung ev_a genau? Ist sie wohldefiniert? Welchen Datentyp hat die Abbildung $a \mapsto \mathrm{ev}_a$? Mit welchem Beweis welcher logischen Aussage steht sie in Zusammenhang.

13. Bekanntlich ist ein Beweis von $A \wedge B$ ein Paar (a, b), bestehend aus einem Beweis a von A und einem Beweis b von B. Mit $A \times B$ wird üblicherweise die Menge aller Paare bezeichnet. Es liegt daher nahe, für $A \times B$ ein Diagramm zu zeichnen, welches demjenigen entspricht, welches wir für $A \wedge B$ gezeichnet haben. Versuchen Sie herauszufinden, wie dieses aussehen könnte.