Formale Grundlagen

2008W

Institut für Algebra
Johannes Kepler Universität Linz

Vorlesung im 2008S

http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/Win/fg

Inhalt

Lineare Algebra
- Affine Räume
- Lineare Räume
- Lineare Abbildungen
- Mengen von Vektoren
- Koordinaten

Vektoren in der Ebene

Definition

Zwei Punkten P, Q in der Ebene wird der Vektor $Q - P$ zugeordnet, welcher die Bewegung nach Q ausgehend von P bezeichnet.

Definition

Seien $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ Vektoren und λ ein Skalar.
Der Vektor $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ bezeichnet jene Bewegung, die zuerst $\mathbf{v}$ und dann $\mathbf{w}$ ausführt.
Der Vektor $\lambda\mathbf{v}$ hat nur einen Anteil von λ an der Bewegung von $\mathbf{v}$.
Somit lassen sich Vektoren addieren und skalieren, und daher auch beliebig linear kombinieren.

Bemerkung

Die Addition von Vektoren ist kommutativ und assoziativ, und zusammen mit der Skalierung gelten die üblichen Distributivgesetze. Skalierungen mit 0 *ergeben stets den Nullvektor* $\mathbf{o}$ *(keine Bewegung). Statt* $(-1)\mathbf{v}$ *schreibt man auch* $-\mathbf{v}$*, und es gilt stets*
$-\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{o} = \mathbf{v} - \mathbf{v}$.

Vektorraum-Axiome

Definition

Erfüllt eine binäre Operation $+\colon V \to V \to V$ zusammen mit einer Subtraktion und einem neutralen Element $\mathbf{o} \in V$ die Rechengesetze einer kommutativen Gruppe, d.h.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &= \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) && \text{(Assoziativität)}\\
\mathbf{v}+\mathbf{o} = \mathbf{o}+\mathbf{v} &= \mathbf{v} && \text{(Neutrales Element)}\\
\mathbf{v}-\mathbf{v} = \mathbf{o} &= -\mathbf{v}+\mathbf{v} && \text{(Inverse Elemente)}\\
\mathbf{v}+\mathbf{w} &= \mathbf{w}+\mathbf{v} && \text{(Kommutativität)}
\end{aligned}
$$

und wird jeder Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ ein Körper) mit einer Abbildung $V \to V$ identifiziert, sodaß auch die folgenden Rechengesetze gelten,

$$
\begin{aligned}
\lambda(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \lambda\mathbf{v}+\lambda\mathbf{w} & \lambda(\mu\mathbf{v}) &= (\lambda\mu)\mathbf{v}\\
(\lambda+\mu)\mathbf{v} &= \lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{v} & 1\mathbf{v} &= \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

dann spricht man vom Vektorraum (oder linearen Raum) V.

Vektorräume

Beispiele

- Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit normaler Addition und Multiplikation.
- Zahlenpaare mit komponentenweise definierten Linearkombiniationen.
- $\mathbb{R}^n$ (ebenfalls komponentenweise).
- Folgen: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (ebenfalls komponentenweise).
- Reellwertige Funktionen $X \to \mathbb{R}$ (mit beliebiger Menge X, punktweise).
- Vektorwertige Funktionen $X \to V$ (mit beliebiger Menge X, beliebigem Vektorraum V, wieder punktweise).
- Reelle Zufallsgrößen.
- Zufallsvektoren.
- Vektoren in der affinen Ebene.
- Vektoren im affinen Raum.

Lineare Abbildungen

Definition

Lineare Abbildungen sind jene, welche mit Linearkombinationen verträglich sind. Genauer: Seien V, W Vektorräume; dann heißt eine Abbildung $h\colon V \to W$ linear, falls für alle Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ und Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ gilt

$$h(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h(\mathbf{v}_k).$$

Bemerkung

Diese Forderung ist äquivalent dazu, daß für alle Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ und Skalare λ, μ gilt

$$h(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda h(\mathbf{v}) + \mu h(\mathbf{w}).$$

oder auch zu

$$h(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = h(\mathbf{v}) + h(\mathbf{w}),$$
$$h(\lambda \mathbf{v}) = \lambda h(\mathbf{v}).$$

Lineare Abbildungen

Beispiele

Sie α ein beliebiger Skalar. Dann ist die Abbildung, welche jeden Vektor ver-α-facht, also

$$h(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v},$$

linear, denn

$$\begin{aligned} h(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) &= \alpha(\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}) \\ &= \alpha(\lambda\mathbf{v}) + \alpha(\mu\mathbf{v}) \\ &= \lambda(\alpha\mathbf{v}) + \mu(\alpha\mathbf{v}) \\ &= \lambda h(\mathbf{v}) + \mu h(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

Auch anschaulich ist dieser Sachverhalt unmittelbar einsichtig. Eine solche lineare Abbildunge heißt Streckung.
Weitere einfache Beispiele sind Spiegelungen (an einem ebenen Spiegel), Projektionen auf eine Ebene oder Gerade, sowie Drehungen um einen Punkt innerhalb einer Ebene oder um eine Gerade (Drehachse).

Lineare Abbildungen

Weitere Beispiele

Ein weniger geometrisches Beispiel ist die Abbildung, welche eine Funktion auf deren Ableitung abbildet, denn auch hier gilt

$$(f+g)' = f' + g' \qquad\qquad (\lambda f)' = \lambda(f').$$

Ein Beispiel für eine lineare Funktion in der Statistik liefert der Erwartungswert, wegen

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \qquad\qquad E(\lambda X) = \lambda E(X).$$

Isomorphie

Definition

Eine lineare Abbildung $V \to W$ heißt Isomorphismus, wenn sie außerdem bijektiv ist. Die Vektorräume V und W heißen dann isomorph.

Definition

Eine injektive lineare Abbildung $V \to W$ heißt Einbettung. Man sagt dann, der Vektorraum V ist in W eingebettet.

Definition

Ist eine lineare Abbildung $V \to W$ surjektiv, dann nennt man W ein Bild von V.

Lineare Unterräume

Definition

Ist eine Teilmenge U des Vektorraums V (mit den ererbten Operationen) ebenfalls ein Vektorraum, dann heißt U ein linearer Unterraum von V, und man schreibt: $U \leq V$.

Bemerkung

Mit den ererbten Operationen gelten selbstverständlich alle geforderten Rechengesetze. Entscheidend ist daher nur, ob diese Operationen in U abgeschlossen sind, d.h. ob mit $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$ auch $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in U$ und $\lambda \mathbf{v} \in U$, für alle Skalare λ.

Bemerkung

Ist $U \leq V$, dann ist die kanonische Injektion $\iota \epsilon\, U \to V$, $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}$ ein Homomorphismus.

Lineare Unterräume

Beispiele

Sei $h \in V \to W$ eine lineare Abbildung.
Dann sind

- das Bild von h: $h(V) := \{\, h(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V \,\}$ und
- der Kern von h: $\ker h := \{\, \mathbf{v} \in V \mid h(\mathbf{v}) = \mathbf{o} \,\}$

lineare Unterräume von W bzw. V.
Jeder affine Raum wird durch Festlegen eines Nullpunktes O zu einem Vektorraum.
Alle Geraden durch den Nullpunkt sind lineare Unterräume der affinen Ebene.
Alle Geraden und Ebenen durch den Nullpunkt sind lineare Unterräume des affinen Raums.
Alle anderen Geraden und Ebenen sind keine linearen Unterräume sondern nur affine Unterräume.

Lineare Hülle

Definition

Sei $E \subseteq V$. Der kleinste lineare Unterraum, der E umfaßt, heißt deren lineare Hülle und wird mit $L(E)$ bezeichnet.

Bemerkung

Es gelten somit:

$$E \subseteq L(E),$$
$$L(E) \leq V,$$
$$\forall_{U \leq V} (E \subseteq U \implies L(E) \leq U).$$

Die lineare Hülle besteht gerade aus jenen Vektoren, die sich als Linearkombinationen der Vektoren in E darstellen lassen.

Definition

Ist $L(E) = V$, dann nennt man E aufspannend.

Beispiel

Zwei Vektoren in der Ebene, die nicht dieselbe Richtung haben, spannen die Ebene auf.

Lineare Unabhängigkeit

Definition

Sei $E \subseteq V$. Dann heißt E linear unabhängig, wenn sich jeder Vektor der linearen Hülle $L(E)$ *eindeutig* als Linearkombination darstellen läßt.

Satz

E ist genau dann linear unabhängig, wenn für alle $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in E$ (paarweise verschieden) gilt

$$\underset{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}}{\forall} \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{e}_k = \mathbf{o} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \Big)$$

Bemerkung

E ist genau dann linear unabhängig, wenn kein Element von E weggelassen werden kann, ohne die lineare Hülle zu verändern.

Basis

Definition

Eine linear unabhängige aufspannende Menge von Vektoren eines linearen Raumes heißt lineare Basis dieses Raumes (oder einfach Basis).

Definition

Hat ein Vektorraum V eine Basis mit n Elementen, dann nennt man ihn n-dimensional und schreibt $\dim V = n$.

Bemerkung

Es läßt sich zeigen, daß die Anzahl der Elemente zweier Basen desselben Raumes stets gleich ist. Somit ist die obige Definition wohldefiniert.

Satz

Sei B eine Basis des Vektorraums V und C eine von W. Dann sind V und W genau dann isomorph wenn B und C gleichmächtig sind.

Koordinaten

Satz

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, d.h. mit einer Basis B, sodaß $|B| = n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zu jedem Vektor $\mathbf{v} \in V$ eindeutig bestimmte Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, sodaß

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{b}_k.$$

Das n-Tupel $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ nennt man den Koordinatenvektor von $\mathbf{v}$ bezüglich der Basis B; er wird gelegentlich mit $(\mathbf{v})_B$ bezeichnet.

Die Abbildung, welche jedem Vektor seinen Koordinatenvektor zuordnet ($\mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v})_B$) ist eine lineare Abbildung von V nach $\mathbb{K}^n$ und bijektiv, also ein Isomorphismus.

Daher gilt weiters: Jeder n-dimensionale Vektorraum ist isomorph zu $\mathbb{K}^n$.