

# Formale Grundlagen

## Graphentheorie

2008W

Franz Binder  
Institut für Algebra  
Johannes Kepler Universität Linz

Vorlesung im 2008S

<http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/Win/fg>

Einführung

Grundbegriffe

Knoten und Kanten

Knotengrad

Struktur

Homomorphismen

Isomorphismen

Automorphismen

Teilgraphen

Verbindungen

Wege und Kreise

Hamiltonsche Graphen

Zusammenhang

Bäume

Baum und Wald

Spannbäume

Minimale Spannbäume

Wurzelbäume

Binärbäume

Kürzeste Wege

# Inhalt

## Einführung

### Grundbegriffe

Knoten und Kanten

Knotengrad

### Struktur

Homomorphismen

Isomorphismen

Automorphismen

Teilgraphen

### Verbindungen

Wege und Kreise

Hamiltonsche Graphen

Zusammenhang

### Bäume

Baum und Wald

Spannbäume

Minimale Spannbäume

Wurzelbäume

Binärbäume

### Kürzeste Wege

# Königsberger Brückenproblem

## Einführung

## Grundbegriffe

Knoten und Kanten  
Knotengrad

## Struktur

Homomorphismen  
Isomorphismen  
Automorphismen  
Teilgraphen

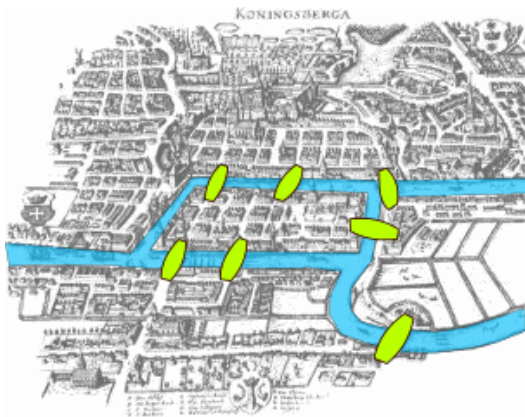
## Verbindungen

Wege und Kreise  
Hamiltonsche Graphen  
Zusammenhang

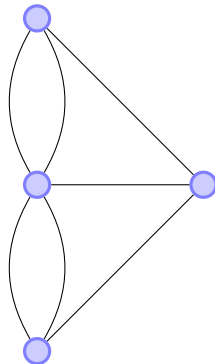
## Bäume

Baum und Wald  
Spannbäume  
Minimale Spannbäume  
Wurzelbäume  
Binärbäume

## Kürzeste Wege



Gibt es einen Spaziergang, der jede Brücke genau einmal benutzt?



Ist dies ein Eulergraph?

## Einführung

## Grundbegriffe

Knoten und Kanten  
Knotengrad

## Struktur

Homomorphismen  
Isomorphismen  
Automorphismen  
Teilgraphen

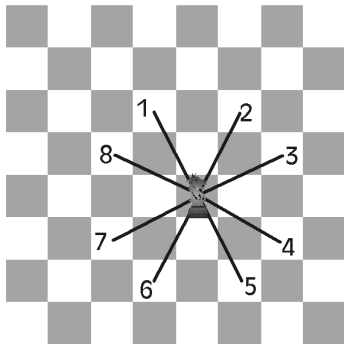
## Verbindungen

Wege und Kreise  
Hamiltonsche Graphen  
Zusammenhang

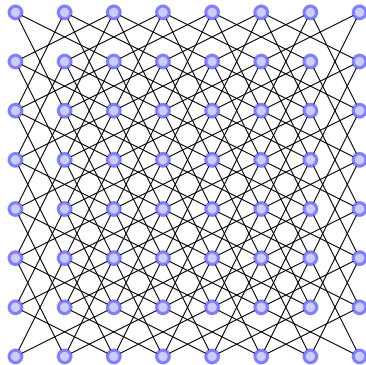
## Bäume

Baum und Wald  
Spannbäume  
Minimale Spannbäume  
Wurzelbäume  
Binärbäume

## Kürzeste Wege



Ist es möglich, mit dem Springer jedes Feld des Schachbrettes genau einmal zu besuchen?



Enthält dieser Graph einen Hamiltonschen Kreis?

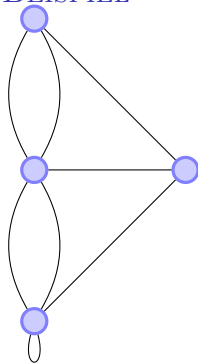
# Knoten und Kanten

## DEFINITION

Ein Graph  $\mathcal{G}$  enthält

- ▶ eine Menge  $V$  von **Knoten**,
- ▶ zu je zwei Knoten  $\{a, b\} \subseteq V$ , eine Menge  $\mathcal{G}(a, b)$  von **Kanten**.

## BEISPIEL



## DEFINITION

- ▶ Gibt es zwischen zwei Knoten mehr als eine Kante, dann spricht man von einer **Mehrfachkante**, bestehend aus mehreren **parallelen** Kanten.
- ▶ Eine Kante, die einen Knoten mit sich selbst verbindet, nennt man eine **Schlinge**.
- ▶ Ein Graph ohne Mehrfachkanten und Schlingen heißt **schlicht**.

## Einführung

## Grundbegriffe

Knoten und Kanten

Knotengrad

## Struktur

Homomorphismen

Isomorphismen

Automorphismen

Teilgraphen

## Verbindungen

Wege und Kreise

Hamiltonsche Graphen

Zusammenhang

## Bäume

Baum und Wald

Spannbäume

Minimale Spannbäume

Wurzelbäume

Binärbäume

## Kürzeste Wege

## DEFINITION

Der **Grad**  $d(a)$  eines Knoten  $a$  in einem Graphen ist die Anzahl der zu  $a$  inzidenten Kanten, wobei Schlingen doppelt zu zählen sind.

## BEMERKUNG

Es gilt:  $d(a) = \sum_b |\mathcal{G}(a, b)| + |\mathcal{G}(a, a)|$ .

## SATZ

*In einem Graphen mit  $m$  Kanten gilt:  $2 \cdot m = \sum_a d(a)$ .*

## FOLGERUNG

*Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.*

## SATZ

*Ist  $i$  ein Graphen-Isomorphismus, dann ist  $d(a) = d(i(a))$ .*

## DEFINITION

Ein Graph heißt **regulär** wenn alle Knoten denselben Grad haben.

## FOLGERUNG

*In einem regulären Graphen vom Grad  $r$  mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten gilt:  $2 \cdot m = n \cdot r$ .*

## Einführung

## Grundbegriffe

Knoten und Kanten

Knotengrad

## Struktur

Homomorphismen

Isomorphismen

Automorphismen

Teilgraphen

## Verbindungen

Wege und Kreise

Hamiltonsche Graphen

Zusammenhang

## Bäume

Baum und Wald

Spannbäume

Minimale Spannbäume

Wurzelbäume

Binärbäume

## Kürzeste Wege

## DEFINITION

Seien  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  zwei Graphen. Ein **Homomorphismus**  $h : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  enthält

- ▶ eine Funktion  $h_0 : V_1 \rightarrow V_2$  zwischen den Knotenmengen,
- ▶ zu je zwei Knoten  $a, b$ , eine Funktion  $h_{a,b} : \mathcal{G}_1(a, b) \rightarrow \mathcal{G}_2(h(a), h(b))$  zwischen den entsprechenden Kantenmengen.

## BEMERKUNG

Ein Graphen-Homomorphismus erhält die Verbindungsstruktur eines Graphen, nicht aber zusätzliche Informationen wie Lage der Knoten oder Form der Kanten.

## BEMERKUNG

Ein Homomorphismus  $h$  zwischen zwei Graphen ohne Mehrfachkanten ist einfach eine Funktion zwischen den Knotenmengen, sodaß gilt: Wenn  $a, b$  benachbart sind, dann auch  $h(a), h(b)$ .

## Einführung

## Grundbegriffe

Knoten und Kanten

Knotengrad

## Struktur

Homomorphismen

Isomorphismen

Automorphismen

Teilgraphen

## Verbindungen

Wege und Kreise

Hamiltonsche Graphen

Zusammenhang

## Bäume

Baum und Wald

Spannbäume

Minimale Spannbäume

Wurzelbäume

Binärbäume

## Kürzeste Wege

## DEFINITION

Ein Graphen-**Isomorphismus** ist ein invertierbarer Graphen-Homomorphismus.

D.h. ein Graphen-Homomorphismus  $h : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  ist ein Isomorphismus, wenn es einen

Graphen-Homomorphismus  $h' : \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_1$  gibt, sodaß  $h_0$  und  $h'_0$  zueinander inverse Abbildungen sind, und auch für alle Knoten  $a, b$  die Abbildungen  $h_{a,b}$  und  $h'_{a,b}$  zueinander invers sind.

## BEMERKUNG

- ▶ Ein Isomorphismus  $h$  zwischen zwei Graphen ohne Mehrfachkanten ist eine bijektive Abbildung zwischen den Knotenmengen, sodaß zwei Knoten  $a, b$  genau dann verbunden sind, wenn  $h(a)$  und  $h(b)$  verbunden sind.
- ▶ Bei Mehrfachkanten muß entsprechend die Anzahl der Kanten gleich bleiben.

## Einführung

## Grundbegriffe

Knoten und Kanten

Knotengrad

## Struktur

Homomorphismen

Isomorphismen

Automorphismen

Teilgraphen

## Verbindungen

Wege und Kreise

Hamiltonsche Graphen

Zusammenhang

## Bäume

Baum und Wald

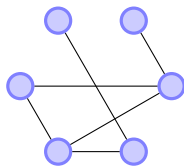
Spannbäume

Minimale Spannbäume

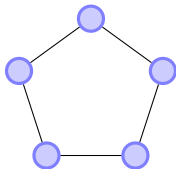
Wurzelbäume

Binärbäume

## Kürzeste Wege



Asymmetrisch

 $\text{Aut } \mathcal{G} \simeq \mathbb{Z}_2$ 

Knoten-transitiv

## DEFINITION

Die Menge aller **Automorphismen** eines Graphen  $\mathcal{G}$  (Isomorphismen  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ ) bildet mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die **Automorphismengruppe**  $\text{Aut } \mathcal{G}$ .

## DEFINITION

- ▶ Ist  $\text{Aut } \mathcal{G} = \{\text{id}\}$ , dann ist  $\mathcal{G}$  **asymmetrisch**.
- ▶ Gilt für zwei Knoten  $\alpha(u) = v$ , mit  $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{G}$ , dann sind  $u$  und  $v$  im Graphen gleichwertig.
- ▶ Sind alle Knoten gleichwertig, dann heißt der Graph **transitiv**.

## Einführung

## Grundbegriffe

Knoten und Kanten

Knotengrad

## Struktur

Homomorphismen

Isomorphismen

Automorphismen

## Teilgraphen

## Verbindungen

Wege und Kreise

Hamiltonsche Graphen

Zusammenhang

## Bäume

Baum und Wald

Spannbäume

Minimale Spannbäume

Wurzelbäume

Binärbäume

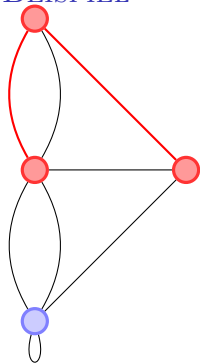
## Kürzeste Wege

## DEFINITION

Ein Graph  $\mathcal{H}$  heißt **Teilgraph** eines Graphen  $\mathcal{G}$ , wenn

- ▶ die Knoten von  $\mathcal{H}$  eine Teilmenge der Knoten von  $\mathcal{G}$  bilden,
- ▶ für alle Knoten  $a, b$  von  $\mathcal{H}$  ist  $\mathcal{H}(a, b) \subseteq \mathcal{G}(a, b)$ .

## BEISPIEL



## BEMERKUNG

- ▶ Das Bild eines Graphen-Homomorphismus  $h : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$  ist ein Teilgraph.
- ▶ Ist dieser injektiv (Knoten- und Kantenteil), so sind  $\mathcal{H}$  und das Bild  $h(\mathcal{G})$  isomorph.
- ▶ Man sagt dann,  $\mathcal{H}$  wird durch  $h$  in  $\mathcal{G}$  **eingebettet**.

## Einführung

## Grundbegriffe

Knoten und Kanten  
Knotengrad

## Struktur

Homomorphismen  
Isomorphismen  
Automorphismen  
Teilgraphen

## Verbindungen

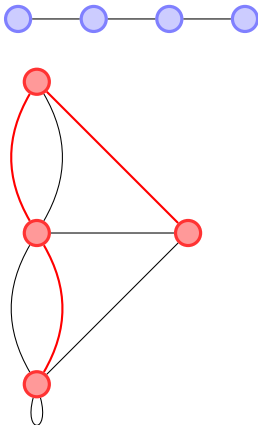
## Wege und Kreise

Hamiltonsche Graphen  
Zusammenhang

## Bäume

Baum und Wald  
Spannbäume  
Minimale Spannbäume  
Wurzelbäume  
Binärbäume

## Kürzeste Wege



## DEFINITION

Ein **Weg** ist ein Graph, dessen Knoten sich so ordnen lassen, daß jeder mit dem nächsten verbunden ist, und der ansonsten keine Kanten besitzt.

Der Weg mit  $n$  Kanten wird mit  $P^n$  bezeichnet.

Ein Weg der Länge  $n$  in einem Graphen ist ein Teilgraph, der isomorph zu  $P^n$  ist.

## BEMERKUNG

Zwei Wege mit  $n$  Kanten sind stets zueinander isomorph.

## BEMERKUNG

Die **Endknoten** eines Weges haben nur einen Nachbarn, während die **inneren Knoten** stets zwei Nachbarn haben.

## Einführung

## Grundbegriffe

Knoten und Kanten

Knotengrad

## Struktur

Homomorphismen

Isomorphismen

Automorphismen

Teilgraphen

## Verbindungen

Wege und Kreise

Hamiltonsche Graphen

Zusammenhang

## Bäume

Baum und Wald

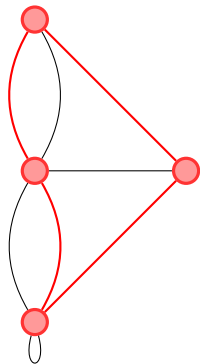
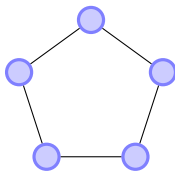
Spannbäume

Minimale Spannbäume

Wurzelbäume

Binärbäume

## Kürzeste Wege



## DEFINITION

Ein **Kreis** ist ein Graph, der entsteht, wenn in einem Weg eine zusätzliche Kante eingefügt wird, die dessen Endknoten verbindet. Der Kreis mit  $n$  Kanten wird mit  $C^n$  bezeichnet. Ein Kreis der Länge  $n$  in einem Graphen ist ein Teilgraph, der isomorph zu  $C^n$  ist.

## BEMERKUNG

Zwei Kreise mit  $n$  Kanten sind stets isomorph.

## BEMERKUNG

Alle Knoten eines Kreises haben exakt zwei Nachbarn. Es gibt keine speziellen Endknoten, alle Knoten sind gleichberechtigt.

## Einführung

## Grundbegriffe

Knoten und Kanten  
Knotengrad

## Struktur

Homomorphismen  
Isomorphismen  
Automorphismen  
Teilgraphen

## Verbindungen

Wege und Kreise

## Hamiltonsche Graphen

Zusammenhang

## Bäume

Baum und Wald  
Spannbäume  
Minimale Spannbäume  
Wurzelbäume  
Binärbäume

## Kürzeste Wege

## Einführung

## Grundbegriffe

Knoten und Kanten

Knotengrad

## Struktur

Homomorphismen

Isomorphismen

Automorphismen

Teilgraphen

## Verbindungen

Wege und Kreise

Hamiltonsche Graphen

Zusammenhang

## Bäume

Baum und Wald

Spannbäume

Minimale Spannbäume

Wurzelbäume

Binärbäume

## Kürzeste Wege

## DEFINITION

Ein nicht-leerer Graph heißt **zusammenhängend** wenn je zwei Knoten stets durch einen Weg verbunden werden können.

## SATZ

*Verbindbarkeit durch einen Weg ist eine Äquivalenzrelation. Ihre Äquivalenzklassen zerlegen den Graphen in **Zusammenhangskomponenten**.*

## SATZ

*Ein endlicher Graph ist genau dann zusammenhängend wenn er das homomorphe Bild eines Weges ist.*

# Baum und Wald

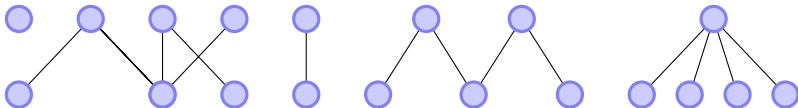
## DEFINITION

- ▶ Ein **Wald** ist ein Graph, der keinen Kreis enthält.
- ▶ Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Wald.

## BEMERKUNG

- ▶ Die Zusammenhangskomponenten eines Waldes sind Bäume.
- ▶ Ein Wald ist somit eine Menge von Bäumen.

## BEISPIEL



## SATZ

- ▶ Ein Graph ist genau dann ein Wald, wenn es zwischen je zwei Knoten *höchstens* einen Weg gibt.
- ▶ Ein Graph ist genau dann ein Baum, wenn es zwischen je zwei Knoten *genau* einen Weg gibt.

## Einführung

## Grundbegriffe

Knoten und Kanten

Knotengrad

## Struktur

Homomorphismen

Isomorphismen

Automorphismen

Teilgraphen

## Verbindungen

Wege und Kreise

Hamiltonsche Graphen

Zusammenhang

## Bäume

Baum und Wald

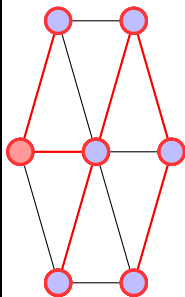
Spannbäume

Minimale Spannbäume

Wurzelbäume

Binärbäume

## Kürzeste Wege



## DEFINITION

Ein Teilgraph  $T$  eines Graphen  $\mathcal{G}$  heißt **aufspannend** wenn er alle Knoten von  $\mathcal{G}$  umfaßt.

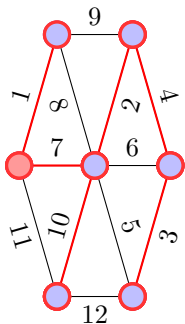
## SATZ

*Jeder zusammenhängende Graph enthält einen aufspannenden Baum (**Spannbaum**).*

## BEWEIS.

- ▶ Wir beginnen mit irgendeinem Knoten (ohne Kanten) als Teilgraph  $T$  (offensichtlich ein Baum).
- ▶ Wenn  $T$  noch nicht alle Knoten umfaßt, dann gibt es, weil  $\mathcal{G}$  zusammenhängend ist, mindestens einen Nachbarknoten von  $T$ .
- ▶ Eine Kante zu einem solchen geben wir zu  $T$  hinzu und fahren mit diesem erweiterten Baum fort.
- ▶ Am Schluß ist  $T$  ein Spannbaum.

# Minimaler Spannbaum



## DEFINITION

Ein Teilgraph  $T$  eines kantengewichteten Graphen  $\mathcal{G}$  heißt **minimaler Spannbaum** wenn er unter allen Spannbäumen das geringste Gesamtgewicht hat.

## SATZ

*Jeder zusammenhängende Graph enthält einen minimalen Spannbaum, und dieser läßt sich durch einen Greedy-Algorithmus leicht finden.*

## BEWEIS.

- ▶ Wir beginnen mit irgendeinem Knoten als Teilgraph  $T$ .
- ▶ Wenn  $T$  noch nicht alle Knoten umfaßt, dann gibt es, weil  $\mathcal{G}$  zusammenhängend ist, mindestens einen Nachbarknoten von  $T$ .
- ▶ Die kleinste passende Kante zu einem solchen geben wir zu  $T$  hinzu und fahren mit diesem erweiterten Baum fort.
- ▶ Am Schluß ist  $T$  ein minimaler Spannbaum.