Formale Grundlagen

7. Übungsaufgaben

2008-05-13, Lösungen

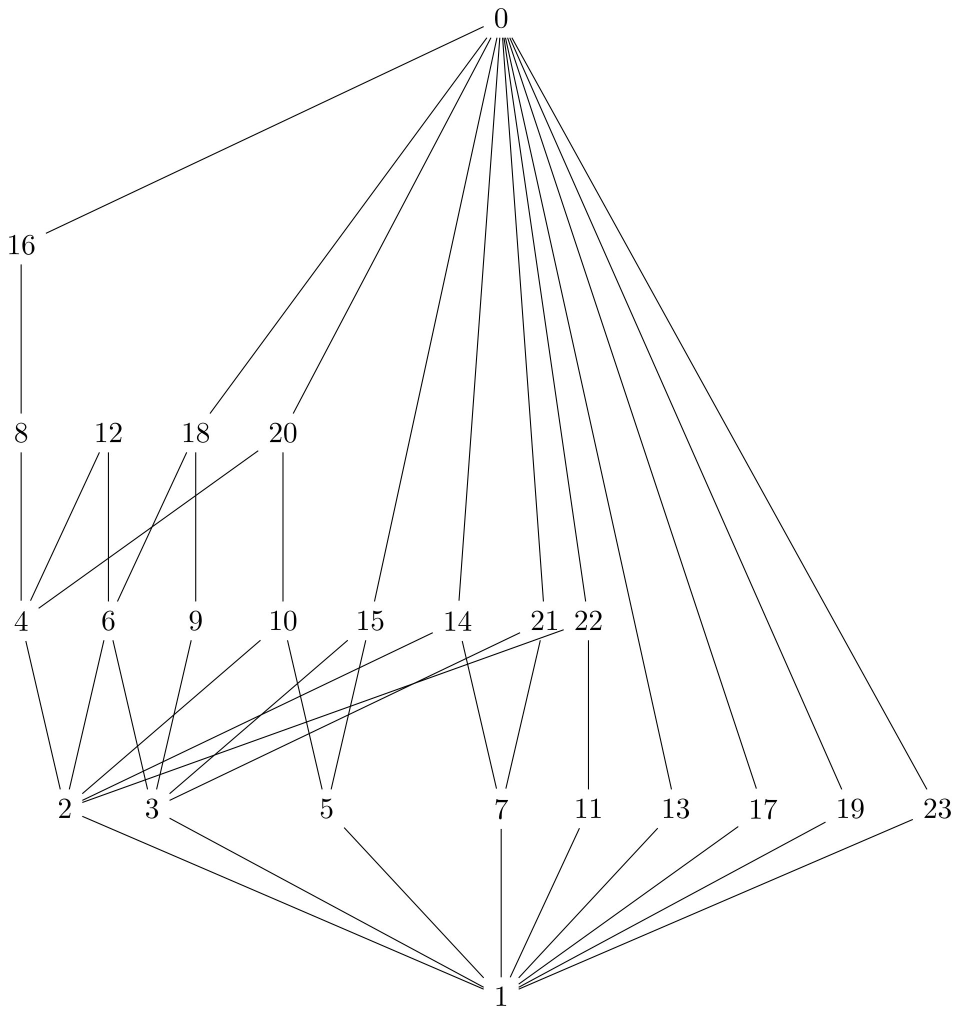
1. Ist es möglich, daß in einer Gruppe von 129 Personen jede mit genau 3 anderen an einem gemeinsamen Projekt arbeitet.

   Lösung: Der entsprechende Graph müßte $\frac{129 \cdot 3}{2}$ Kanten haben.

2. Der Graph $\mathcal{G}$ bestehe aus den Knoten $\{0, 1, 2, \ldots, 24\}$ und sei so beschaffen, daß es genau dann einen Weg zwischen zwei Knoten gibt, wenn einer ein Teiler des anderen ist.

   Zeichnen Sie einen derartigen Graphen, der mit möglichst wenig Kanten auskommt.

Lösung:



3. Ein Dominostein besteht aus 2 quadratischen Feldern mit jeweils 0 bis 6 Punkten. Ein Dominospiel hat genau einen Stein für jede mögliche Kombination. Diese Steine sollten schlangenförmig aneinandergelegt werden, sodaß die berührenden Enden dieselbe Punktezahl haben.

   Kann man die Dominosteine zu einem Kreis auslegen, sodaß kein Stein überquert? Was ändert sich, wenn jedes Feld bis zu 9 Punkte beinhalten kann?

   Lösung: Wir verwenden die Menge $\{0, 1, \dots, 6\}$ als Knotenmenge. Der Dominostein mit den Punkten a und b entspricht dann einer Kante zwischen a und b. Das ganze Dominospiel entspricht daher einem vollständigen

Graphen $\bar{K}^7$ auf einer 7-elementigenMenge (inklusive Schlingen in jedem Knoten). Man kann die Steine genau dann zu einem Kreis auslegen, wenn $\bar{K}^7$ ein Eulergraph ist. Dies ist der Fall, da $\bar{K}^7$ regulär vom Grad 8 ist, und somit insbesondere jeder Knoten geraden Grad hat.

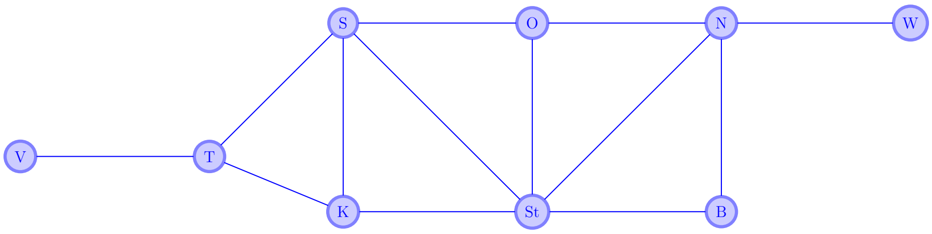
Wenn jedes Feld bis zu 9 Punkte haben kann, dann geht es darum, ob $\bar{K}^{10}$ ein Eulergraph ist. In diesem hat aber jeder Knoten den Grad 11, sodaß das Problem für derartige Dominosteine nicht lösbar ist.

4. Königsberg wurde im 2. Weltkrieg heftig umkämpft und schwer zerstört. Es wurde aber (als Kaliningrad) wieder aufgebaut. Einen modernen Stadtplan findet man z.B. unter
`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Miscellaneous/other_links/Konigsberg.html`
Gibt es jetzt einen Spaziergang, der alle Brücken genau einmal verwendet?

5. Wieviele Bäume mit 4 Knoten gibt es?

Lösung: Zwei. Und zwar:

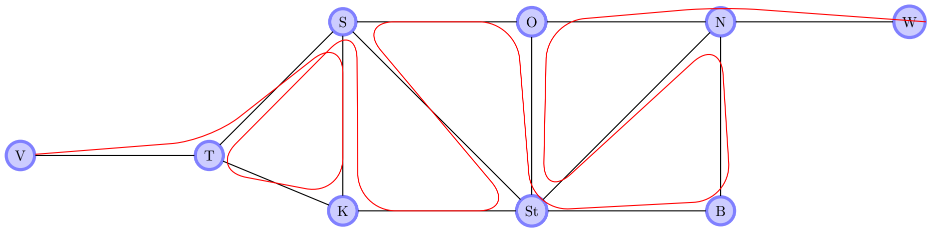
6. Finden Sie einen Homomorphismus von einem Weg in den folgenden Graphen:



Suchen Sie insbesondere einen Homomorphismus, der surjektiv ist (sowohl Knoten- als auch Kantenabbildung).

Ist dieser Graph eulersch?

Lösung: Die Idee für einen derartige Homomorphismus ist durch die rote Linie im Graphen angedeutet.

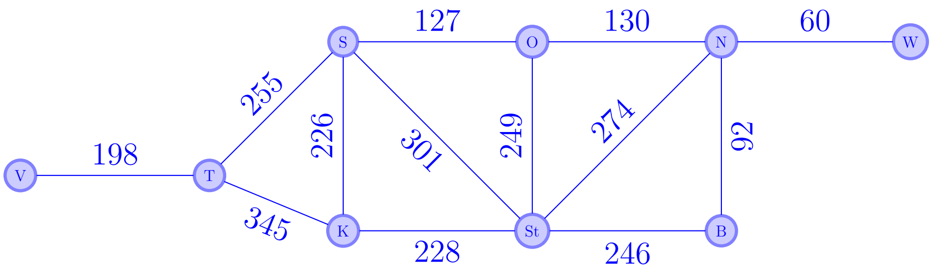


Etwas formaler ausgedrückt: Wir verwenden einen Weg der Länge 16 und bezeichnen dessen Knoten der Reihe nach mit mit $V, T, S, K, T', S', K', St, S'', O, St', B, N, St'', O', N', W$. Unseren Homomorphismus h definieren wir dann durch $h(V) = V$, $h(T) = T$, $h(S) = S$, $h(K) = K$, $h(T') = T$, $h(S') = S$, $h(K') = K$, $h(St) = St, \ldots$.

Dieser Homomorhismus verwendet manche Kanten mehrmals, was sich auch nicht vermeiden läßt, weil viele Knoten ungeraden Grad haben und der Graph damit nicht Eulersch ist.

7. Finden Sie ein paar Spannbäume im Graphen aus Beispiel **??**.

8. Finden Sie einen minimalen Spannbaum im Graphen:



Beginnen Sie mit verschiedenen Knoten und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Lösung: Egal in welchem Knoten wir beginnen, wir erhalten in jedem Fall den folgenden minimalen Spannbaum: