Formale Grundlagen

6. Übungsaufgaben

2008-05-06, Lösungen

1. Finden Sie alle Automorphismen von P^5, dem Weg der Länge 5, d.h. alle bijektiven Abbildungen $h : P^5 \to P^5$, sodaß für alle Knoten a, b von P^5 gilt: a und b sind genau dann benachbart wenn $h(a)$ und $h(b)$ benachbart sind.

   Lösung: Neben der identischen Abbildung gibt es noch die Spiegelung, welche die Endknoten vertauscht (und damit ich die Nachbarknoten der Endknoten, etc.).

2. Finden Sie auch alle Automorphismen des Kreises C^5, sowie des Graphen vom Königsberger Brückenproblem.

   Lösung: Ein Automorphismus α des Kreises C^5 bildet einen Knoten n auf eine beliebigen anderen ab. Ist m eine Nachbarknoten von n, so muß auch $\alpha(m)$ einer der beiden Nachbarknoten von $\alpha(n)$ sein. Die Bilder der übrigen Knoten ergeben sich dann zwangsläufig. Insgesamt gibt es somit 10 Automorphismen.

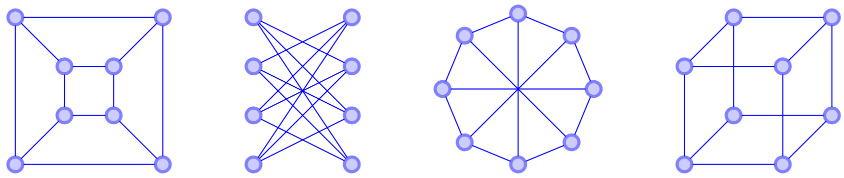
   Beim Königsberger Brückenproblem kann ein Automorphismus den nördlichen und südlichen Stadtteil vertauschen. Alle anderen müssen fix bleiben.

3. Finden Sie einen Homomorphismus von P^5 nach

   - P^6;
   - P^4;
   - C^6;
   - C^5.

   Lösung: Nach P^6 und C^6 gibt es sogar offensichtliche Einbettungen. In den anderen Fällen müssen zumindest zwei Knoten dasselbe Bild erhalten. Diese dürfen allerdings nicht benachbart sein, da die Bildgraphen keine Schleifen haben. Die zweite Einschränkung ist, daß benachbarte Knoten auf benachbarte Knoten abgebildet werden müssen. In allen Fällen bleibt damit noch eine stattliche Anzahl von Möglichkeiten.

4. Welche Paare der folgende Graphen sind isomorph?



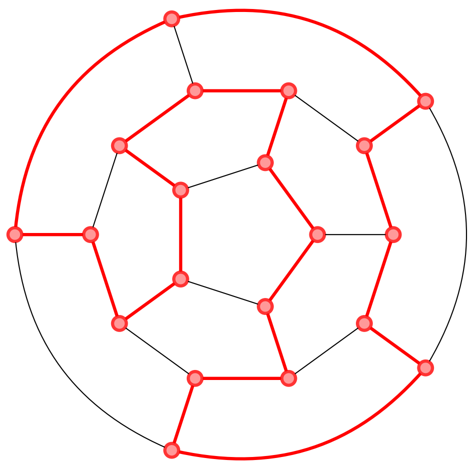
Lösung: Der dritte Graph tanzt etwas aus der Reihe, z.B. weil zwei Nachbarknoten eines Knoten nicht immer einen weiteren gemeinsamen Nachbarknoten haben; oder weil er Fünfecke enthält.

Für jedes Paar aus den anderen drei Graphen läßt sich leicht ein Isomorphismus finden. Tatsächlich gibt es jeweils 48 Möglichkeiten (entsprechend den 48 Automorphismen).

5. Finden Sie einen Hamiltonschen Kreis (einen Kreis der alle Knoten genau einmal besucht) in dem Graphen, dessen Knoten und Kanten die Ecken bzw Kanten eines Dodekaeders sind.

   Hinweis: Es ist wahrscheinlich hilfreich, einen dazu isomorphen Graphen auf ein ebenes Blatt Papier zu zeichnen.

   Lösung: Durch Probieren findet man z.B.:



6. Ein Krug ist mit 8 Liter Wein gefüllt. Zwei weitere Krüge, die 5 bzw. 3 Liter fassen, stehen daneben, sind aber leer. Durch Umschütten sollten 4 Liter ausgemessen werden. Erstellen Sie einen Graphen, der dieses

Problem modelliert, und finden Sie darin einen Weg von der Ausgangssituation in eine, in der ein Krug genau 4 Liter beinhaltet.

Lösung: Mit dem Tripel (a_1, a_2, a_3) beschreiben wir die Situation, daß der i-te Krug a_i Liter Wein enthält. Offenbar müssen alle $a_i \in \mathbb{N}$ sein, wobei $a_1 \leq 8$, $a_2 \leq 5$, $a_3 \leq 3$, und $a_1 + a_2 + a_3 = 8$. Jedes Zahlentripel mit diesen Eigenschaften entspricht einem Knoten in unserem Graphen. Sei $m = \min(a_1, 3 - a_3)$. Wenn $m > 0$, dann kann man m Liter von a_1 nach a_3 umschütten und findet sich dann in der Situation $(a_1 - m, a_2, a_3 + m)$ wieder. Analog für alle anderen Paare von Krügen. In dem Graphen der Abbildung 1 (die weniger interessanten Kanten sind grau oder rosa gezeichnet) findet man dann leicht einen Weg zu einer der 3 erreichbaren Konfigurationen, in denen mindestens ein Krug 4 Liter enthält. (In diesem Graphen sind die Kanten gerichtet, weil sich nicht jeder Schritt umkehren läßt.)

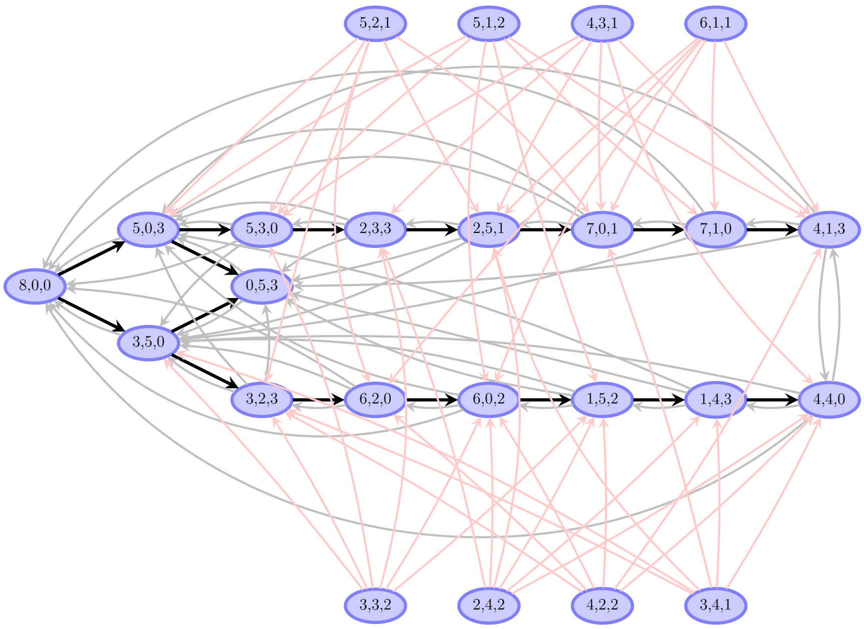


Abbildung 1: Ein Graph für das Umschütten von Krügen mit 8/5/3 Litern

7. Wenn der Knoten a genau n Nachbarn (das sind direkt durch eine Kante verbundene Knoten) hat, und h ein Homomorphismus ist, wieviele Nachbarknoten kann dann $h(a)$ haben?

Lösung: Ist h injektiv, dann muß $h(a)$ mindestens n Nachbarknoten haben. Im allgemeinen, können aber viele oder sogar alle dieser Nachbarknoten von $h(a)$ gleich sein. Es läßt sich somit nur feststellen, daß $h(a)$ mindestens einen Nachbarn haben muß, wenn $n \geq 1$ ist.

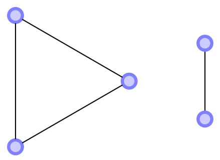
Was ändert sich, wenn h ein Isomorphismus ist?

Lösung: Dann hat $h(a)$ ebenfalls genau n Nachbarn.

8. Wir nennen zwei Knoten eines Graphen *verbindbar*, wenn der Graph einen Weg enthält, dessen Endknoten diese beiden Knoten sind.

   Zeichnen Sie eine Graphen, in dem nicht alle Knoten verbindbar sind,

   Lösung: Bsp.:



   und zeigen Sie, daß Verbindbarkeit eine Äquivalenzrelation ist.

   Lösung:

   - Jeder Knoten ist durch einen trivialen Weg (isomorph zu P^0) mit sich selbst verbunden.
   - Jeder Weg zwischen den Knoten a und b ist auch ein Weg zwischen b und a.
   - Sei u ein Weg zwischen a und c, und v ein Weg zwischen b und c. Die Vereinigung von u und v muß kein Weg zwischen a und c sein, da sich diese beiden Wege kreuzen könnten. Sie enthält aber einen Weg: Sei b' der (von a kommend) erste Kreuzungspunkt. Unser Weg von a nach b führt daher entlang u bis zum Knoten b', und dann weiter entlang v.