Formale Grundlagen

3. Übungsaufgaben

2008-04-15, Lösungen

1. Zeichnen Sie eine beliebige Basis $\{\,\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\,\}$ in eine Ebene. Zeichnen Sie dann noch einen dritten Vektor $\mathbf{v}$ und bestimmen Sie dessen Koordinaten bezüglich der Basis.

2. Sei g die lineare Abbildung, welche 1 auf $\mathbf{v}$ (von oben) abbildet. Bestimmen Sie das Bild von g.

   Lösung: Es entspricht der Geraden durch den Nullpunkt, welche in Richtung $\mathbf{v}$ verläuft.

3. Sei f die lineare Abbildung, welche $\mathbf{b}_1$ (von oben) auf 3 abbildet, und $\mathbf{b}_2$ auf 5. Bestimmen Sie den Kern von f.

   Lösung: Ein beliebiger Punkt der Ebene hat die Form $\lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2$. Es gilt $f(\lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{b}_2) = \lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 \cdot 5$. Der Punkt liegt somit genau dann im Kern, wenn $\lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 \cdot 5 = 0$. Umformen ergibt somit $\lambda_2 = -\frac{3}{5} \cdot \lambda_1$. Der Kern besteht somit aus den Vektoren der Form $\lambda_1 \cdot \mathbf{b}_1 - \frac{3}{5} \cdot \lambda_1 \cdot \mathbf{b}_2$. Dies sind genau die Vielfachen des Vektors $\mathbf{b}_1 - \frac{3}{5} \cdot \mathbf{b}_2$. Somit können wir den Kern auch durch eine Basis darstellen als $L(\mathbf{b}_1 - \frac{3}{5} \cdot \mathbf{b}_2)$. Oder auch als $L(5 \cdot \mathbf{b}_1 - 3 \cdot \mathbf{b}_2)$.

4. Wählen Sie drei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{B} = \{\,\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\,\}$ in einem Raum V und eine Basis $\mathbf{C} = \{\,\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\,\}$ in einem anderen Raum. Sei h die lineare Abbildung, welche $\mathbf{b}_1$ auf $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$ abbildet, $\mathbf{b}_2$ auf $2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$ und $\mathbf{b}_3$ auf $3\mathbf{c}_1$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$ von h bezüglich dieser Basen.

   Lösung:
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Führen Sie das vorige Beispiel fort und bestimmen Sie das Bild von h ($\{\, h(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V \,\}$) sowie den Kern von h ($\{\, \mathbf{v} \in V \mid h(\mathbf{v}) = \mathbf{o} \,\}$), indem Sie von beiden eine Basis angeben.

   Lösung: Das Bild ist die lineare Hülle von $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$, $2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$ und $3\mathbf{c}_1$. Diese sind jedoch nicht linear unabhängig (der dritte ist die Summe der beiden ersten), sodaß eine Basis des Bildraums von h z.B. aus zwei dieser beiden Vektoren gebildet werden kann.

   Um eine Basis des Kerns zu finden, verwenden wir wieder einen beliebigen Vektor von V und sehen uns sein Bild an:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \lambda_2 \mathbf{b}_3) &= \lambda_1 f(\mathbf{b}_1) + \lambda_2(\mathbf{b}_2) + \lambda_3 f(\mathbf{b}_3) \\ &= \lambda_1(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) + \lambda_2(2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2) + \lambda_3(3\mathbf{c}_1) \\ &= (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)\mathbf{c}_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{c}_2. \end{aligned}$$

   Dies ist genau dann gleich $\mathbf{o}$, wenn

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 \qquad &= 0. \end{aligned}$$

   [rl] Wir erkennen, daß die Koeffizienten hier exakt mit den Einträgen in der Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$ übereinstimmen. Vereinfachen der Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_1, \\ \lambda_3 &= -\lambda_1. \end{aligned}$$

   Der Kern besteht somit aus allen Vektoren der Form $\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_1 \mathbf{b}_2 - \lambda_1 \mathbf{b}_3$, d.h. aus der linearen Hülle von $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3$.

6. Wählen Sie ein beliebiges Zahlentripel $\mathbf{x}$ und bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{v}$ in V mit diesen Koordinaten bezüglich $\mathbf{B}$. Bestimmen Sie $h(\mathbf{v})$ (d.h. dessen Koordinaten bezüglich $\mathbf{C}$). Fassen Sie $\mathbf{x}$ als Spaltenvektor auf und berechnen Sie das Matrizenprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

   Wenn Sie nicht wissen, wie man Matrizen multipliziert, hilft wahrscheinlich
   `http://de.wikipedia.org/wiki/Matrix#Matrizenmultiplikation`

   Lösung: Sei etwa

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix},$$

dann ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 \\ 1 \cdot 5 - 1 \cdot 6 + 0 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dies bedeutet: $h(5\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 + 7\mathbf{b}_3) = 38\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$.

Setzen wir degegen die Koordinaten eines Vektors aus dem Kern ein, so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dies bedeutet: $h(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3) = \mathbf{o}$, wie es sich für eine Vektor aus dem Kern gehört.