Formale Grundlagen

2. Übungsaufgaben

2008-04-08, Lösungen

1. Wir haben gesehen, daß die Abbildung $z \mapsto \frac{z}{1}$ ein Ring-Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$ ist. Was ändert sich, wenn man stattdessen die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$ verwendet.

   Lösung: Sei $h \in \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ diese Abbildung. Wäre sie ein Homomorphismus, dann müßte sie (unter anderem) erfüllen $h(n+m) = h(n) + h(m)$, also $\frac{1}{n+m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, was im allgemeinen nicht erfüllt ist.

   Man beachte aber, daß die zweite zu erfüllende Bedingung, $h(n \cdot m) = h(n) \cdot h(m)$ sehr wohl gilt.

2. Es seien $\alpha, \beta \in \Sigma$. Wieviele Monoid-Homomorphismen $f \in (\mathbb{Z}, +) \to (\Sigma^*, \diamond)$ mit $f(1) = \langle \alpha, \beta \rangle$ gibt es?

   Lösung: Es muß z.B. gelten: $f(2) = f(1+1) = f(1) \diamond f(1) = \langle \alpha, \beta \rangle \diamond \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \beta, \alpha, \beta \rangle$. Allgemeiner gilt

   $$f(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}}) = \langle \underbrace{\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots, \alpha, \beta}_{n\text{-mal}} \rangle .$$

   Und weil ein Monoid-Homomorphismus auch $f(0) = \langle\rangle$ erfüllen muß, gilt dies auch für $n = 0$.

   Es gibt somit nur einen Homomorphismus mit der geforderten Eigenschaft.

3. Wieviele gibt es mit $f(2) = \langle \alpha \rangle$?

   Lösung: Da $f(2) = f(1) \diamond f(1) \neq \langle \alpha \rangle$, kann es keinen derartigen Homomorphismus geben.

4. Es seien G, H Gruppen und $h \in G \to H$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, daß $\{ x \in G \mid h(x) = 1 \}$ eine Untergruppe bildet.

   Lösung: Sei K diese Menge. Mit $x_1, x_2 \in K$ folgt $h(x_1 \cdot x_2) = h(x_1) \cdot h(x_2) = 1 \cdot 1 = 1$. Somit ist $x_1 \cdot x_2 \in K$. Klarerweise gilt $h(1) = 1$, sodaß $1 \in K$. Und für jedes $x \in K$ gilt, $h(x^{-1}) = h(x)^{-1} = 1^{-1} = 1$; daher ist dann auch $x^{-1} \in K$

5. Verwenden Sie im vorigen Beispiel speziell die Gruppen $G = H = (\mathbb{Z}_m, +)$ und $h(x) = a \cdot x$, mit $a \in \mathbb{Z}$ (z.B. $m = 12$, $a = 9$). (Beachten Sie, daß das 1-Element in dieser Gruppe hier die Zahl 0 ist.) Überprüfen Sie, daß h tatsächlich ein Homomorphismus ist. Was bedeutet dies für die Lösungsmenge der Gleichung $a \cdot x \equiv_m 0$?

   Lösung: h ist eine Homomorphismus:

   - $h(x + y) = a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y = h(x) \cdot h(y)$;
   - $h(0) = a \cdot 0 = 0$;
   - $h(-x) = a \cdot (-x) = -a \cdot x = -h(x)$.

   Die Lösungsmenge von $a \cdot x \equiv_m 0$ ist gerade $\{ x \in \mathbb{Z}_m \mid h(x) = 0 \}$, der *Kern* von h. Sie bildet somit insbesondere eine Untergruppe. D.h.

   - $a \cdot x \equiv 0 \wedge a \cdot y \equiv 0 \implies a \cdot (x + y) \equiv 0$;
   - $a \cdot 0 \equiv 0$;
   - $a \cdot x \equiv 0 \implies a \cdot (-x) \equiv 0$.

6. Sei $Q = \{ 1, 2, 3 \}$ und $S \leq (Q^Q, \circ)$ eine Unterhalbgruppe. Es sei $f \in S$ mit $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 3$. Welche Elemente muß S auf jeden Fall noch enthalten?

   Lösung: Da S eine Unterhalbgruppe sein soll, muß es jedenfalls noch f^2, f^3, f^4, ... enthalten. Es gilt z.B. $f^2(1) = 3$, $f^2(2) = 4$, $f^2(3) = 3$, $f^2(4) = 3$. Man stellt fest: $f^4 = f^2$. Somit bildet $\{ f, f^2, f^3 \}$ eine Unterhalbgruppe, die gerade groß genug ist, damit sie f enthalten kann. Man nennt sie daher die von f *erzeugte* Unterhalbgruppe.