

# Formale Grundlagen

## 5. Übungsaufgaben

2008-04-29, Lösungen

1. Die Information 0100101 sollte übermittelt werden. Welche Bitfolge ist zu senden, wenn ein Paritätsbit verwendet werden soll.

Welche der Bitfolgen 01010111, 00010010, 11111111, 01001001 sind korrekte Codewörter? Wieviele Codewörter gibt es?

Wie hängt diese Art der Codierung mit der ASCII-Codierung von Zeichen zusammen.

2. Wir betrachten den folgenden Code: Um eine Nachricht  $x_1x_2x_3$  zu übertragen, werden die Prüfziffern  $x_4 = x_1 + x_2$ ,  $x_5 = x_1 + x_3$ ,  $x_6 = x_2 + x_3$  angehängt (alle Additionen verstehen sich modulo 2). Betrachten Sie die Bitfolgen dieses Codes als Elemente des Vektorraums  $\mathbb{B}^6$  (Skalare sind hier die Elemente von  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ , Addition geschieht modulo 2). Finden Sie eine Matrix  $\mathbf{P}$ , sodaß  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$  genau dann wenn  $\mathbf{x}$  eine gültige Codewort ist. Prüfen Sie, ob 101110, 010101 gültige Codewörter sind, indem Sie mit  $\mathbf{P}$  multiplizieren.
3. Lösen Sie die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in dem Sinne, daß Sie eine Basis des Lösungsraumes angeben (die Lösungsmenge ist ja offensichtlich in linearer Unterraum von  $\mathbb{B}^6$ ).

4. Das *Hamming-Gewicht*  $\|\mathbf{x}\|$  einer Binärfolge  $\mathbf{x}$  ist definiert als die Anzahl der Einsen in dieser Folge. Mit dem *Hamming-Abstand* zweier

Binärfolgen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  ist dann  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  gemeint. *Der Minimalabstand* eines Codes ist dann der kleinste Hamming-Abstand, den zwei verschiedene Codewörter haben. Bestimmen Sie den Minimalabstand der bisher besprochenen Codes (einfacher Wiederholungscode, doppelter Wiederholungscode, ein Paritätsbit, Beispiel 2. Bestimmen Sie auch die jeweilige Informationsrate.

Erfüllt der Hamming-Abstand tatsächlich alle drei definierenden Bedingungen für einen vernünftigen Abstands begriff?

5. Überlegen Sie sich geometrisch, wieviele Fehler ein Code mit Minimalabstand  $d$  erkennen bzw. korrigieren kann.
6. Die ISBN Nummer (vgl. z.B. <http://en.wikipedia.org/wiki/ISBN>) ist ein Code, der Einfachfehler und auch Vertauschungen zweier benachbarter Ziffern erkennt. Finden Sie auch hier eine Prüfmatrix  $\mathbf{P}$ , sodaß die Lösungen von  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$  genau den gültigen ISBN-Nummern entsprechen.
7. Wie funktioniert RAID-5? Warum reicht hier schon 1 Paritätsbit, um eine Fehler*korrektur* zu bewerkstelligen?
8. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Bit einer 100 Mbit/s Datenleitung falsch übertragen wird, sei  $10^{-8}$ . Mit welcher Fehlerhäufigkeit ist zu rechnen?

Nun verwenden wir jedes 12. bit als Paritätsbit. Wie lange wird es in etwa dauern, bis ein unerkannter Fehler auftritt?