

Formale Grundlagen

4. Übungsaufgaben

2008-04-22, Angaben

1. Wir suchen die beste Lösung der Gleichung

$$3x_1 + 1x_2 = 6.$$

Schreiben Sie diese Gleichung mit Matrizen und Vektoren, also in der Form

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Dabei bezeichne \mathbf{x} den Spaltenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. In diesem einfachen Beispiel hat \mathbf{A} nur eine Zeile, $\mathbf{A} = (3 \ 1)$, und \mathbf{b} ist eine 1×1 -Matrix. Zeichnen Sie den Vektor \mathbf{z}_1 , der die einzige Zeile von \mathbf{A} beschreibt, in ein kartesisches Koordinatensystem.

Wir lösen nun die homogene Gleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$. Man findet leicht ein paar Lösungen, z.B. indem man $x_1 = 0$ setzt und dann nach x_2 auflöst, oder indem man $x_2 = 0$ setzt. Die Gesamtheit der Lösungen (der Nullraum von \mathbf{A}) ist jedenfalls ein linearer Unterraum. Finden Sie dafür eine Basis und zeichnen Sie alles in das kartesische Koordinatensystem von vorhin. Berechnen Sie das Skalarprodukt von jeder Zeile von \mathbf{A} mit jedem Basisvektor des Nullraums. Schließen Sie daraus, daß der Nullraum orthogonal zu den Zeilen von \mathbf{A} ist. Überprüfen Sie dies auch anhand der Skizze.

Nun suchen wir die Lösungen der inhomogenen Gleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Wir können wieder, z.B. durch Nullsetzen einer Variablen, leicht Lösungen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ finden. Die Gesamtheit der Lösungen ist nun ein affiner Unterraum L .

Wir suchen nun unter allen Lösungen die kleinste, also eine Lösung \mathbf{x}_0 sodaß $\|\mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{x}\|$, für jede Lösung \mathbf{x} von $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. In der Skizze ist diese Lösung leicht zu finden, da geometrisch klar ist, daß \mathbf{x}_0 orthogonal zu L sein muß. Tatsächlich ist nur der Vektor \mathbf{z}_1 entsprechend zu skalieren. Ist das Zufall? Der gesuchte Vektor hat also die Form

$\mathbf{z}_1 \cdot y_1$, wobei y_1 der passende Skalar ist. Man beachtet, daß \mathbf{z}_1 zwar die Zeile von \mathbf{A} beschreibt, die Lösung $\mathbf{z}_1 \cdot y_1$ aber ein Spaltenvektor sein sollte. Wir bezeichnen sie daher mit $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y}$, wobei \mathbf{A}^T die transponierte Matrix von \mathbf{A} ist und $\mathbf{y} = (y_1)$. Wir setzen also $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y}$ für \mathbf{x} ein und haben insgesamt die Gleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$ nach \mathbf{y} zu lösen. Wir können diese sogar als $\mathbf{y} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \mathbf{b}$ darstellen. Insgesamt ergibt sich somit $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \mathbf{b}$. Die Matrix $\mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1}$ nennen wir Moore-Penrose-Inverse und bezeichnen sie mit \mathbf{A}^- . Damit erhalten wir als (optimale) Lösung der Gleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ einfach $\mathbf{x} = \mathbf{A}^- \cdot \mathbf{b}$. Vergewissern Sie sich, daß das errechnete Ergebnis mit der Skizze übereinstimmt.

2. Wir lösen nun das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3y_1 &= 2 \\ 1y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Schreiben Sie dieses in Matrixform $\mathbf{B} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}$. Es läßt sich auch interpretieren als das Problem, für den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Koordinaten bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu finden. Machen Sie davon wieder eine Skizze.

Klarerweise ist dieses Problem unlösbar. Wir suchen daher eine Lösung, die den Fehler minimiert, d.h. ein \mathbf{y}_0 , sodaß $\|\mathbf{B} \cdot \mathbf{y}_0 - \mathbf{c}\| \leq \|\mathbf{B} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{c}\|$, für alle \mathbf{y} . Es stellt sich heraus, daß man diese Lösung bekommt, indem man die Gleichung auf beiden Seiten von links mit \mathbf{B}^T multipliziert. (Können Sie diesen Schritt exakt begründen?) Lösen Sie diese Gleichung und verifizieren Sie das Ergebnis anhand der Skizze. Die Matrix $(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T$ nennen wir wieder Moore-Penrose-Inverse und bezeichnen sie mit \mathbf{B}^- , sodaß wir $\mathbf{y} = \mathbf{B}^- \cdot \mathbf{c}$ als bestapproximierende Lösung der (unlösbaren) Gleichung $\mathbf{B} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}$ erhalten.

3. Wenn die Matrix $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ invertierbar ist, definieren wir

$$\mathbf{A}^- := \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^{-1},$$

und wenn die Matrix $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ invertierbar ist, definieren wir

$$\mathbf{A}^- := (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T.$$

Zeigen Sie, daß in jedem Fall die Beziehungen

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^- \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^- \quad \mathbf{A}^- \cdot \mathbf{A}^- \cdot \mathbf{A}^- = \mathbf{A}^-$$

gelten.

Es läßt sich ferner zeigen, daß es zu jeder Matrix \mathbf{A} genau eine Matrix \mathbf{A}^- gibt, sodaß die beiden obigen Gleichungen erfüllt sind und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^-$ und $\mathbf{A}^- \cdot \mathbf{A}$ symmetrisch sind. Sie heißt *Moore-Penrose-Inverse*. Wenn Sie gerade kein passendes Programm zur Verfügung haben, um diese zu berechnen, hilft wahrscheinlich ein Online-Matrizenrechner, z.B. <http://www.bluebit.gr/matrix-calculator>. Berechnen Sie damit die Moore-Penrose-Inverse von ein paar Matrizen, insbesondere von denen in der vorigen Beispielen.

4. Es seien Punkte gegeben durch die Koordinaten (x_k, y_k) gemäß der Tabelle

k	x_k	y_k
1	0	2.5
2	1	3.7
3	3	5.5
4	7	10.9
5	8.3	12.2

Zeichnen Sie diese in ein kartesisches Koordinatensystem. Wir haben die Vermutung, daß diese alle auf einer Geraden der Form $y = k \cdot x + d$ liegen, d.h. wir möchten alle Gleichungen $y_k = k \cdot x_k + d$, für $k = 1, \dots, 5$ zu erfüllen. Klarerweise ist dies unlösbar, sodaß wir versuchen eine Lösung zu finden, die wenigstens den Fehler minimiert. Schreiben Sie daher das Gleichungssystem in der Form $\mathbf{B} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}$, mit passenden Matrizen bzw. Vektoren, an. Beachten Sie, daß hier k und d die Variablen sind (also $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} d \\ k \end{pmatrix}$), während die x_k und y_k ja bekannt sind.

Hinweis: Sie können die Lösung mittels der Moore-Penrose-Inversen \mathbf{B}^- berechnen, so wie in den Beispielen zuvor.

5. Gegeben sei eine Ebene E im \mathbb{R}^3 , aufgespannt durch zwei Basisvektoren und ein weiterer Vektor:

$$E = L\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie jenen Punkt der Ebene, welche am nächsten bei \mathbf{v} liegt (die Projektion von \mathbf{v} in die Ebene E).

Hinweis: Versuchen Sie die Koordinaten von \mathbf{v} bezüglich den beiden Basisvektoren von E zu bestimmen. Die führt zu einem überbestimmten

Gleichungssystem (3 Gleichungen und zwei Variable). Lösen Sie dieses wieder mit der Moore-Penrose-Inversen.

Auch hier ist es sinnvoll, eine Skizze anzufertigen.