Formale Grundlagen

2. Übungsaufgaben

2008-04-08, Angaben

1. Wir haben gesehen, daß die Abbildung $z \mapsto \frac{z}{1}$ ein Ring-Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$ ist. Was ändert sich, wenn man stattdessen die Abbildung $\mapsto \frac{1}{z}$ verwendet.

2. Es seien $\alpha, \beta \in \Sigma$. Wieviele Monoid-Homomorphismen $f \in (\mathbb{Z}, +) \to (\Sigma^*, \diamond)$ mit $f(1) = \langle \alpha, \beta \rangle$ gibt es?

3. Wieviele gibt es mit $f(2) = \langle \alpha \rangle$?

4. Es seien G, H Gruppen und $h \in G \to H$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, daß $\{ x \in G \mid h(x) = 1 \}$ eine Untergruppe bildet.

5. Verwenden Sie im vorigen Beispiel speziell die Gruppen $G = H = (\mathbb{Z}_m, +)$ und $h(x) = a \cdot x$, mit $a \in \mathbb{Z}$ (z.B. $m = 12$, $a = 9$). (Beachten Sie, daß das 1-Element in dieser Gruppe hier die Zahl 0 ist.) Überprüfen Sie, daß h tatsächlich ein Homomorphismus ist. Was bedeutet dies für die Lösungsmenge der Gleichung $a \cdot x \equiv_m 0$?

6. Sei $Q = \{ 1, 2, 3 \}$ und $S \leq (Q^Q, \circ)$ eine Unterhalbgruppe. Es sei $f \in S$ mit $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 3$. Welche Elemente muß S auf jeden Fall noch enthalten?