# Formale Grundlagen

## 1. Übungsaufgaben

## 2008-04-01, Angaben

1. Bekanntlich gibt es zu jeder Relation eine zugehörige inverse Relation, definiert durch

$$x \overset{R}{\to} y \iff y \overset{R^{-1}}{\to} x.$$

   Warum ergibt sich dennoch keine Gruppe?

2. Zeigen Sie, daß in jeder Gruppe gilt: $a \cdot b = a \cdot c \implies b = c$.

3. Betrachten Sie den Ring $\mathbb{Z}_{15}$ (ganze Zahlen modulo 15). Warum ist dieser kein Körper? Welche Elemente darin sind invertierbar?

4. Finden Sie $a, b \in \mathbb{Z}_{15}$ mit $a \neq 0 \neq b$, sodaß $a \cdot b = 0$. Kann es solche Elemente auch in einem Körper geben?

5. Welche Elemente im Ring $\mathbb{Z}_{17}$ sind invertierbar? Warum? Ist $\mathbb{Z}_{17}$ ein Körper?

6. Ist in den Körpern $\mathbb{Z}_5$ bzw. $\mathbb{Z}_7$ die Gleichung $x^2 = 2$ lösbar? Und wie sieht die Lösung gegebenenfalls aus?

7. Sei $R$ ein beliebiger kommuntativer Ring. Der Polynomring $R[x]$ besteht dann aus allen formalen Ausdrücken, welche aus Elementen von $R$ und $x$ gebildet werden können, wobei weiterhin alle Rechengesetze gelten sollten. Berechnen Sie Summe und Produkt der beiden Polynome $p := x^6 + x^3 - 1$ und $q := x^4 + x^3 + x$.

8. Verwenden Sie für die Berechnungen im vorigen Beispiel $R = \mathbb{Z}_2$ und $R = \mathbb{Z}_3$ statt $R = \mathbb{R}$.

9. Rechnen Sie nach, daß sich mit dem Relationenprodukt tatsächlich ein Monoid ergibt.