7.7 Wohlfundierte Relationen

7.7.1 Beispiel. In der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen definieren wir die Vorgängerrelation $\prec\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \Omega$ durch

$$m \prec n :\iff Sm = n.$$

Sei weiters $P\colon \mathbb{N} \to \Omega$ ein einstelliges Prädikat auf $\mathbb{N}$. Die Aussage $\bigwedge_{m \prec Sn} P(m)$ ist dann äquivalent zu $P(n)$, während die Aussage $\bigwedge_{m \prec 0} P(m)$ trivialerweise wahr ist, weil 0 keinen Vorgänger hat. Somit gelten auch

$$\begin{aligned}
\Big(\Big(\bigwedge_{m\colon \mathbb{N}} m \prec Sn \implies P(m)\Big) \implies P(Sn)\Big) &\iff \big(P(n) \implies P(Sn)\big) \\
\Big(\Big(\bigwedge_{m\colon \mathbb{N}} m \prec 0 \implies P(m)\Big) \implies P(0)\Big) &\iff P(0)
\end{aligned}$$

Das Induktionsprinzip (Peano-Induktion) für die natürlichen Zahlen

$$\frac{P(0) \qquad \bigwedge_{n\colon \mathbb{N}} \big(P(n) \implies P(Sn)\big)}{\bigwedge_{n\colon \mathbb{N}} P(n)}$$

läßt sich somit auch als

$$\frac{\bigwedge_{n\colon \mathbb{N}} \Big(\bigwedge_{m\colon \mathbb{N}} m \prec n \implies P(m)\Big) \implies P(n)}{\bigwedge_{n\colon \mathbb{N}} P(n)}$$

formulieren.

7.7.2 Beispiel. Für Listen über einer Menge A definieren wir die Vorgängerrelation $\prec\colon A^* \to A^* \to \Omega$ durch

$$t \prec \ell :\iff \bigvee_{h\colon A} h \triangleleft t = \ell.$$

Das bekannte Induktionsprinzip für Listen läßt sich dann als

$$\frac{\bigwedge_{\ell\colon A^*} \Big(\bigwedge_{t\colon A^*} t \prec \ell \implies P(t)\Big) \implies P(\ell)}{\bigwedge_{\ell\colon A^*} P(\ell)}$$

formulieren, wobei $P\colon A^* \to \Omega$ wieder ein einstelliges Prädikat ist.

7.7.3 Definition. Eine Relation $\prec\colon X \to X \to \Omega$ in einer Menge X heißt *wohlfundiert* wenn für jedes Prädikat $P\colon X \to \Omega$ gilt:

$$\frac{\bigwedge_{x\colon X} \Big(\bigwedge_{y\colon Y} y \prec x \implies P(y)\Big) \implies P(x)}{\bigwedge_{x\colon X} P(x)}$$

7.7.4 Beispiel. Die Relation $<: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \Omega$ in den natürlichen Zahlen ist wohlfundiert. Dies bedeutet, daß das Prinzip der *vollständigen Induktion* gultig ist:

$$\frac{\bigwedge_{n:\,\mathbb{N}} \big(\bigwedge_{m:\,\mathbb{N}} m < n \implies P(m)\big) \implies P(n)}{\bigwedge_{n:\,\mathbb{N}} P(n)}$$

Es besagt somit, daß man beim Beweis für $P(n)$ einfach die Gültigkeit von $P(m)$, für $m < n$, zusätzlich voraussetzen darf. Es fällt auf, daß dies im Fall $n = 0$ nichts bringt, sodaß tatsächlich auch hier der Induktionsanfang $P(0)$ zu zeigen ist.

Dieses Induktionsprinzip läßt sich auch direkt durch folgende Beobachtung rechtfertigen: Wenn wir der Reihe nach $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, etc. beweisen, dann haben wir, wenn z.B. $P(4)$ an die Reihe kommt, bereits $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ bewiesen. Das heißt wir brauchen also nur noch

$$P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \implies P(4)$$

zu zeigen; das ist aber dasselbe wie

$$\big(\bigwedge_{m:\,\mathbb{N}} m < 4 \implies P(m)\big) \implies P(4).$$

Wir haben dieses Prinzip bereits im Zusammenhang mit dem Euklidschen Algorithmus verwendet.

7.7.5 Satz. *Sei $\prec: X \to X$ eine wohlfundierte Relation in X, dann ist auch dessen transitive Hülle $\prec^+$ wohlfundiert.*

7.7.6 Beispiel. Die Wohlfundiertheit von $<$ folgt somit aus der Tatsache, daß die Relation $<$ die transitive Hülle der Vorgängerrelation $\prec$ in den natürlichen Zahlen ist: $\prec^+ = <$.

Klarerweise ist nicht jede Relation wohlfundiert.

7.7.7 Beispiel. Die Relation $<: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \Omega$ ist nicht wohlfundiert.

Beweis. Wir nehmen an, diese Relation sei wohlfundiert und beweisen damit etwas Falsches, z.B.

$$\bigwedge_{z:\,\mathbb{Z}} z > 5.$$

Um dies zu beweisen, reicht es (wegen der angenommenen Wohlfundiertheit), für jedes $z: \mathbb{Z}$ die Aussage $z > 5$ unter Verwendung der Induktionshypothese

$$\bigwedge_{y:\,\mathbb{Z}} y < z \implies y > 5$$

zu beweisen.

Sei also $z: \mathbb{Z}$. Die Induktionshypothese liefert uns z.B. (für $y := z - 1$)

$$z - 1 > 5,$$

woraus

$$z > 5$$

sofort folgt. □

Man beachte, daß dies nur deshalb funktioniert, weil wir zu jeder ganzen Zahl eine kleinere finden können. Für $\mathbb{N}$ statt $\mathbb{Z}$ hätten wir bei $z = 0$ ein Problem, weil es keine kleinere natürliche Zahl mehr gibt, sodaß wir $0 > 5$ tatsächlich ohne irgendeine Annahme beweisen müßten, was natürlich nicht möglich ist. (Für $\mathbb{Z}$ liefert uns die Induktionsannahme hier $-1 > 5$, was zwar falsch ist, aber dennoch leicht $0 > 5$ zur Folge hat).

7.7.8 Bemerkung. Nicht wohlfundiert sind weiters z.B. die $>$-Relation in $\mathbb{N}$ und die $<$-Relation in den positiven rationalen Zahlen.

7.7.9 Satz. *Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion und $\prec\colon Y \to Y \to \Omega$ eine wohlfundierte Relation in Y. Dann ist auch die durch*

$$x \prec_f y :\Longleftrightarrow\ f(x) \prec f(y)$$

definierte Relation $\prec_f\colon X \to X \to \Omega$ wohlfundiert.

7.7.10 Beispiel. Für Listen A^* ist die Länge eine Funktion in die natürlichen Zahlen. Da in $\mathbb{N}$ die Relation $<$ wohlfundiert ist, ist auch die durch

$$m \prec \ell :\Longleftrightarrow\ |m| < |\ell|$$

definierte Relation in A^* wohlfundiert. Dies erlaubt es uns, Induktion über die Länge von Listen zu führen:

$$\frac{\bigwedge\limits_{\ell\colon A^*} \Big(\bigwedge\limits_{m\colon A^*} |m| < |\ell| \implies P(m)\Big) \implies P(\ell)}{\bigwedge\limits_{\ell\colon A^*} P(\ell)}$$

7.7.11 Beispiel. Sei A eine Menge, in der eine lineare Ordnung $\preceq$ definiert ist. Sei $\operatorname{sort}\colon A^* \to A^*$ die Funktion, welche jeder Liste dessen sortierte Version zuordnet. Man kann eine solche Funktion etwa folgendermaßend rekursiv definieren:

$$\begin{aligned} \operatorname{sort}[\,] &= [\,] \\ \operatorname{sort}(\ell) &= \operatorname{sort}[x \leftarrow \ell \mid x \prec a] \diamond [x \leftarrow \ell \mid x = a] \diamond \operatorname{sort}[x \leftarrow \ell \mid x \succ a] \end{aligned}$$

wobei für das a in der zweiten Gleichung irgendein Element aus der Liste ℓ gewählt wird (am besten zufällig).

7.7.12 Satz. *In den Mengen A und B seien die wohlfundierten Relationen $\prec_A$ bzw. $\prec_B$ gegeben. Dann erhalten wir durch*

$$(a, b) \prec (c, d) :\Longleftrightarrow\ a \prec_A c \vee (a = b \wedge b \prec_B d)$$

eine wohlfundierte Relation (die lexikographische Ordnung*).*

7.7.13 Beispiel. Die *Ackermann-Funktion* $A\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ wird definiert durch

$$\begin{aligned} A(0,n) &= n+1 \\ A(m,0) &= A(m-1,1) \\ A(m,n) &= A(m-1, A(m,n-1)) \end{aligned}$$

Dies Gleichungen definieren tatsächlich eine eindeutig bestimmte (totale) Funktion, da jedes Parameterpaar auf der rechten Seite gemäß der lexikographischen Ordnung in $\mathbb{N}^2$ stets kleiner ist als das zugehörige auf der linken Seite.

7.7.14 Bemerkung. Die lexikographische Ordnung läßt sich auch für Listen formulieren.

7.7.15 Satz. *In den Mengen A und B seien die wohlfundierten Relationen $\prec_A$ bzw. $\prec_B$ gegeben. Für die direkte Summe (disjunkte Vereinigung) $A+B$ dieser beiden Mengen erhalten wir durch*

$$a \prec b :\iff (a \in A \wedge b \in B) \vee (a \in A \wedge a \prec_A b) \vee (a \in A \wedge a \prec_A b)$$

(kurz: die Elemente von A werden vor B gereiht) eine wohlfundierte Relation.

7.7.16 Satz. *Ist in einer Menge X eine wohlfundierte Relation $<$ gegeben, und ist $\prec$ eine weitere Relation in dieser Menge, welche*

$$x \prec y \implies x < y$$

erfüllt, so ist auch $\prec$ wohlfundiert.

7.7.17 Beispiel. Die Relation

$$x \prec y :\iff x \text{ ist echter Teiler von } y$$

ist wohlfundiert in den ganzen Zahlen.

Beweis. Für Zahlen $a, b > 0$ gilt bekanntermaßen

$$a \prec b \implies a < b.$$

Damit ist $\prec$ zumindest in der Teilmenge der positiven Zahlen wohlfundiert (Satz 7.7.16). Die Zahl 0 hängen wir gemäß Satz 7.7.15 hinten an, sodaß die Wohlfundiertheit für ganz $\mathbb{N}$ gilt. Um sie auch für $\mathbb{Z}$ zu erhalten, verwenden wir Satz 7.7.9 mit der Betragsfunktion. $\square$