

8.3 Bäume

Zyklenrang

8.3.1 DEFINITION. Einen zyklensfreien Graphen nennt man einen *Wald*. Ein zusammenhängender Wald heißt *Baum*.

Da jede Zusammenhangskomponente eines Waldes ein Baum ist, ist die aus Biologie entnommene Terminologie gerechtfertigt. Ein Wald besteht also aus einer Menge von Bäumen.

8.3.2 DEFINITION. In einem Graphen Γ mit n Knoten, m Kanten und p Zusammenhangskomponenten heißt die Zahl $\nu = m - n + p$ der *Zyklenrang* von Γ .

8.3.3 DEFINITION. Eine Kante heißt *Brücke*, wenn sich durch ihre Entfernung die Anzahl der Zusammenhangskomponenten erhöht.

8.3.4 SATZ. *Jeder Graph hat Zyklenrang $\nu \geq 0$, und er ist genau dann ein Wald, wenn $\nu = 0$.*

Beweis. Die Eigenschaft $\nu \geq 0$ gilt für jeden Graphen ohne Kanten ($m = 0$, $n = p$). Wird zu einem Graphen, der $\nu \geq 0$ erfüllt, eine Kante hinzugefügt, dann erhöht sich m um 1, während p entweder um 1 vermindert (wenn die neue Kante eine Brücke ist) oder gleich bleibt. In jedem Fall bleibt der Zyklenrang positiv. Da jeder Graph durch Hinzufügen von Kanten aus dem Nullgraphen hervorgeht, ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Ist Γ ein Wald, so kann die neue Kante in der obigen Überlegung stets eine Brücke sein, da ansonsten ein Kreis entstehen würde. Deshalb muß der Zyklenrang $= 0$ bleiben.

Umgekehrt entsteht stets ein Wald, wenn die neue Kante stets eine Brücke ist. \square

8.3.5 SATZ. *Ein Graph mit n Knoten, m Kanten und p Zusammenhangskomponenten ist genau dann ein Baum wenn*

1. *er zwei der drei folgenden Eigenschaften erfüllt:*
 - (a) $p = 1$ (zusammenhängend),
 - (b) $\nu = 0$ (kreisfrei),
 - (c) $m = n - 1$;
2. *Jede Kante eine Brücke ist;*
3. *er maximal kreisfrei ist;*
4. *er minimal zusammenhängend ist;*
5. *jedes Paar von Knoten durch genau einen Weg verbunden ist.*

Beweis. Übung. \square

Aufspannende Bäume

8.3.6 DEFINITION. Ein Teilgraph eines Graphen Γ heißt ein *aufspannend* wenn er alle Knoten von Γ umfaßt.

8.3.7 SATZ. *Jeder zusammenhängende Graph enthält einen aufspannenden Baum.*

Beweis. Sei T ein Baum und Teilgraph des zusammenhängenden Graphen Γ . Falls T alle Knoten von Γ enthält, dann ist T bereits ein aufspannender Baum. Wenn nicht, dann enthält Γ eine Kante, welche T mit einem Knoten außerhalb von T verbindet, weil Γ zusammenhängend ist. Durch eine solche Kante wird T ergänzt, und das Ergebnis ist wiederum ein Baum. Dieser Schritt wird solange wiederholt, bis ein aufspannender Baum gefunden wird. \square

8.3.8 SATZ. *Der vollständige Graph K_n enthält n^{n-2} Gerüste.*

8.3.9 DEFINITION. Sei Γ ein mit positiven Zahlen bewerteter Graph. Ein *Minimalgerüst* (*minimal spanning tree*) ist ein Gerüst, dessen Gesamtgewicht (Summe der Bewertungen aller seiner Kanten) minimal ist.

Man beachte, daß ein Graph durchaus mehrere Minimalgerüste enthalten kann.

8.3.10 SATZ. *Jeder zusammenhängende Graph enthält ein Minimalgerüst, welches auf effiziente Weise gefunden werden kann.*

Beweis. Im Verfahren zum Auffinden eines Gerüstes (Beweis von Satz 8.3.7) wählen wir unter allen in Frage kommenden Kanten eine mit minimaler Bewertung. Es läßt sich zeigen, daß man auf diese Weise stets ein Minimalgerüst erhält. \square

Das obige Verfahren zum Auffinden eines Minimalgerüstes ist ein typisches Beispiel für einen Greedy-Algorithmus.