

## 8.6 Kürzeste Wege

Gibt es mehrere Wege zwischen zwei Knoten, so ist im allgemeinen der kürzeste interessant. Dazu betrachten wir Graphen, deren Kanten mit positiven Zahlen bewertet sind.

**8.6.1 DEFINITION.** Die *Länge* eines Weges in einem bewerteten Graphen ist definiert als die Summe der Bewertungen der betroffenen Kanten.

Die Bewertung einer Kante  $e$  sei mit  $|e|$  bezeichnet, die Länge eines Weges  $p$  mit  $|p|$ , und die Länge des kürzesten Weges vom Knoten  $v$  zum Knoten  $w$  mit  $|v, w|$ .

**8.6.2 BEMERKUNG.** Sei  $p$  ein kürzester Weg von  $s$  nach  $v$ , d.h.  $|p| = |s, v|$ , und sei weiters  $e$  eine Kante von  $v$  nach  $w$ . Dann muß  $pe$  nicht unbedingt ein kürzester Weg von  $s$  nach  $w$  sein; wir wissen nur

$$|s, w| \leq |pe|.$$

Wir brauchen also eine zusätzliche Bedingung.

Sei  $S$  eine Menge von Knoten in einem positiv bewerteten Graphen, sodaß  $s \in S$ . Dann nennen wir  $S$  *gut*, wenn für jeden Knoten  $v \in S$  und für jeden Weg  $p$  von  $s$  zu einem Knoten außerhalb von  $S$  gilt:

$$|s, v| \leq |p|$$

Sei  $w$  ein Nachbarknoten von  $S$ . Wir bestimmen dazu einen Knoten  $v \in S$  und eine Kante  $e$  von  $v$  nach  $w$ , sodaß  $|s, v| + |e|$  minimal ist, und definieren damit:

$$\begin{aligned} c_S(w) &= |s, v| + |e| \\ d_S(w) &= v \end{aligned}$$

Wir wissen somit, daß es einen Weg der Länge  $c_S(w)$  von  $s$  nach  $w$  gibt, und daß  $d_S(w)$  dessen vorletzter Knoten ist. Im allgemeinen gilt nur  $|s, w| \leq c_S(w)$ .

**8.6.3 LEMMA.** Sei  $S$  gut und  $v$  ein Nachbarknoten von  $S$ , für den  $c_S(v)$  minimal ist. Sei  $p$  ein kürzester Weg von  $s$  nach  $d_S(v)$  und  $e$  eine Kante von  $d_S(v)$  nach  $w$ . Dann ist  $pe$  ein kürzester Weg von  $s$  nach  $v$  und  $|s, v| = c_S(v)$ . Die Menge  $S \cup \{v\}$  ist dann ebenfalls gut und für jede Kante  $e$  von  $v$  nach  $w \notin S$  mit  $c_S(v) + |e| < c_S(w)$  gilt:

$$\begin{aligned} c_{S \cup \{v\}}(w) &= c_S(v) + |e|, \\ d_{S \cup \{v\}}(w) &= v, \end{aligned}$$

und für alle anderen Nachbarknoten von  $S \cup \{v\}$  gilt

$$\begin{aligned} c_{S \cup \{v\}}(w) &= c_S(w) \\ d_{S \cup \{v\}}(w) &= d_S(w) \end{aligned}$$

**8.6.4 THEOREM (Dijkstra).** Sei  $\Gamma$  ein mit positiven Zahlen bewerteter Graph. Dann gibt es ein effizientes Verfahren, um den kürzesten Weg zwischen zwei Knoten zu bestimmen (oder festzustellen, daß es keinen Weg gibt).

*Beweis.* Sei  $s$  der Startknoten, und  $t$  der Zielknoten. Die Menge  $\{s\}$  ist brav, für jeden Nachbarknoten  $w$  von  $s$  gilt:  $d(w) = s$  und  $c(w)$  entspricht der Länge der entsprechenden Kanten. Wir verwenden das Lemma um schrittweise jeweils einen Knoten hinzuzufügen, bis der Knoten  $t$  erreicht ist oder bis es keinen Nachbarknoten mehr gibt (was genau dann passiert, wenn  $t$  nicht in der Zusammenhangskomponente von  $s$  liegt).  $\square$

Der im obigen Beweis vorgestellte Algorithmus ist ein Beispiel für *dynamische Programmierung*, deren Grundidee es ist, daß man sich die Zwischenergebnisse merkt, um sie später nicht wieder berechnen zu müssen.

Wir stellen fest, daß die Anzahl der Schritte in diesem Verfahren proportional zur Anzahl der Kanten in der Zusammenhangskomponente von  $s$  ist.