8.4 Planare Graphen

Einbettungen

Graphen werden anschaulich, falls die Knoten als Punkte in einer Ebene und die Kanten als (nicht notwendigerweise geradlinige) Verbindungslinien zwischen deren Endknoten gezeichnet werden.

8.4.1 DEFINITION. Ein Graph heißt *planar* falls er in einer Ebene so gezeichnet werden kann, daß sich die Verbindungslinien nicht kreuzen.

Die Formulierung „kann gezeichnet werden“ bedeutet dabei, dass es einen dazu isomorphen Graphen gibt, dessen Knoten Punkte sind und dessen Kanten Kurven sind.

Offenbar ist ein Graph genau dann planar wenn jede seiner Zusammenhangskomponenten planar ist. Man kann sich daher nach Belieben auf zuammenhängende schlichte Graphen beschränken.

Planarität läßt sich auch rein kombinatorisch beschreiben.

Jede Einbettung eines Graphen in der Ebene definiert eine *zyklische Ordnung* des Graphen, d.h. in jedem Knoten wird eine Reihenfolge der in diesem inzidenten Kanten festgelegt, etwa durch den Uhrzeigersinn. Dadurch gibt es zu jeder Kante eine nächste, allerdings keine erste oder letzte Kante. Eine *Masche* ist dann ein geschlossner Kantenzug, in dem eine darin nachfolgende Kante gerade diejenige ist, welche in der zyklischen Ordnung als nächstes kommt, und welcher solange fortgesetzt wird, bis die erste Kante wieder in derselben Richtung durchlaufen wird. Jede Kante gehört somit zu genau 2 Maschen, entsprechend den beiden Richtungen.

Eulersche Polyederformel

Durch einen kreuzungsfrei gezeichneten Graphen wird die Ebene in mehrere Gebiete zerteilt. Jedes dieser Gebiete entspricht genau einer Masche, und das Gebiet um den ganzen Graphen herum entspricht der Masche, welche am Weg entlang des Außenrandes des Graphen führt.

8.4.2 THEOREM (Eulersche Polyederformel). *Ein kreuzungsfrei gezeichneter zusammenhängender schlichter Graph mit n Knoten und m Kanten zerlegt die Ebene in $m - n + 2$ Gebiete.*

Beweis. Die Behauptung stimmt für eine Graphen mit nur einem Knoten und ohne Kanten, also für den Fall $m = 0$, $n = 1$. Wir fahren mit Induktion fort. Wird zu einem Graphen, der die Behauptung erfüllt eine Kante zusammen mit einem neuen Knoten hinzugefügt, so ändert sich die Zahl der Gebiete nicht, und auch nicht die Differenz $m - n$. Verbindet eine neue Kante dagegen zwei schon vorhandene Knoten, dann geht sich das nur dann kreuzungsfrei aus, wenn dadurch ein Gebiet zerteilt wird. Daher erhöht sich in diesem Falle sowohl die Anzahl der Gebiete als auch die Differenz $m - n$ um 1. Da jeder zusammenhängende Graph auf derartige Weise entsteht, sind wir fertig. □

Die Anzahl der Maschen eines kreuzungsfrei gezeichneten Graphen stimmt mit der Anzahl der Gebiete überein, in die er die Ebene zerlegt. Sie ist aber auch für nicht kreuzungsfrei gezeichnete Graphen definiert, kann dann aber kleiner sein als $m - n - 2$. Es läßt sich zeigen, daß ein Graph genau dann planar ist, wenn es eine zyklischen Ordnung gibt, die zu genau dieser maximal möglichen maximalen Maschenzahl führt.

8.4.3 SATZ. *Sei Γ ein zusammenhängender planarer schlichter Graph mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten. Dann gilt:*

1. *$m + 6 \leq 3n$;*
2. *falls Γ kein Dreieck enthält, dann gilt sogar $m + 4 \leq 2n$;*
3. *Γ enthält mindestens einen Punkt mit Grad ≤ 5.*

Beweis. Jede Fläche ist durch mindestens 3 Kanten begrenzt. Daher ist $3(m - n - 2) \leq 2m$, was nach einer Vereinfachung die erste Behauptung ergibt. Wenn aber jede Fläche sogar durch mindestens 4 Kanten begrenzt ist, dann ergibt sich $4(m - n - 2) \leq 2m$, was nach einer Vereinfachung zur zweiten Behauptung führt.

Die Summe der Kantengrade aller Knoten ist $2m$. Hat aber jeder Knoten Grad ≥ 6, dann ist diese Summe mindestens $6n$, was der ersten Behauptung widerspricht. □

Kuratowski-Graphen

8.4.4 BEISPIEL. Nicht planar sind (Übung)

1. K_5, der vollständige Graph mit 5 Knoten, und
2. $K_{3,3}$, der vollständige bipartite Graph mit zweimal 3 Knoten.

Diese beiden Graphen heißen der erste bzw. zweite *Kuratowski-Graph.*

8.4.5 THEOREM (Kuratowski). *Ein schlichter zusammenhängender Graph ist genau dann nicht planar, wenn er eine Unterteilung eines der beiden Kuratowsi-Graphen als Teilgraph besitzt.*

Daß ein Graph, der einen nicht-planaren Teilgraphen enthält, niemals planar sein kann, ist unmittelbar einsichtig. Der Beweis für die andere Richtung ist deutlich schwieriger und ein klassisches Resultat der Graphentheorie (1930) (zu finden z.B. in Martin Aigner, Graphentheorie, Kapitel 4, Teubner, 1984.)

8.4.6 SATZ. *Für das Problem, festzustellen ob ein Graph planar ist, gegebenfalls eine Einbettung in die Ebene zu finden (sogar eine geradlinige, auf Wunsch auch als „gutes Bild“), oder anderenfalls einen Kuratowski-Graphen als Beweis für die Nicht-Planarität zu finden, gibt es effiziente Algorithmen.*

Auf die weiteren Detail dieser Algorithmen sie hier nicht eingegangen. Bemerkenswert ist noch, daß ein planarer Graph stets so kreuzungsfrei gezeichnet werden kann, daß alle Kanten sogar Strecken sind. Und daß die Verfahren auch dahingehend verbessert werden können, daß am Ende „gute“ Bilder des Graphen generiert werden.