8.7 Flußprobleme

In diesem Zusammenhang werden Kantenbewertungen als maximale Durchfluß-Kapazität zwischen den betroffenen Knoten interpretiert.

8.7.1 Definition. Sei X die Knotenmenge eines Graphen Γ.

1. Unter einem *Fluß* versteht man dann eine asymmetrische Funktion $\phi\colon X \to X \to \mathbb{Z}$, also eine Funktion mit $\phi(x,y) = -\phi(y,x)$.

2. Die *Flußstärke* $\rho(x)$ im Knoten x ist definiert als

$$\rho(x) = \sum_{y \in \Gamma(x)} \phi(x,y),$$

   wobei $\Gamma(x)$ die Menge aller Nachbarknoten von x bezeichnet.

3. Sind a, b Knoten, dann heißt der Fluß ϕ ein a-b-Fluß, wenn $\rho(x) = 0$, außer für $x \in \{a, b\}$.

Für einen a-b-Fluß gilt $\rho(a) = -\rho(b)$. Daß die Flußstärke überall sonst gleich Null ist, bedeutet lediglich, daß aus jedem Knoten genauso viel herausfließt wie auch hineinfließt. Die Knoten a und b heißen dann auch die Quelle und das Ziel des Flusses. Und $\rho(a)$ ist der *Gesamtdurchfluß* von a nach b.

8.7.2 Definition. Sei $c\colon X \to X \to \mathbb{N}$ eine Kantenbewertung von Γ; mit $c(x,y) = 0$, wenn es keine Kante von x nach y gibt. Dann heißt ein Fluß ϕ zulässig, wenn für alle $x, y \in X$ gilt:

$$\phi(x,y) \leq c(x,y).$$

Das Problem besteht nun darin, ein zulässiges ϕ zu finden, sodaß der Gesamtdurchfluß maximal wird.

8.7.3 Algorithmus (Ford-Fulkerson). Man verwende irgendeinen Weg von a nach b. Der Durchfluß auf diesem Weg entspricht dem Minimum aller Kantenbewertungen darin. Dieser Durchfluß wird nun bei den Kapazitäten jeder verwendetetn Kante abgezogen.

Nun betrachtet man den Graphen mit diesen Restkapazitäten und fährt entsprechend fort, uns zwar solange sich ein zulässiger Weg von a nach b mit einem positivem Durchfluß finden läßt.

Die für jede Kante auf diese Weise verbrauchte Kapazität entspricht somit einem zuläsien ϕ, welches den Gesamtdurchfluß entspricht.