Kapitel 8

Graphentheorie

8.1 Einführung

8.1.1 Beispiel. Jedes der folgenden Probleme läßt sich mit Graphentheorie lösen.

1. Drei Häuser sollen je durch eine eigene Leitung mit dem Wasser-, Gas- und Elektrizitätswerk verbunden werden. Frage: Ist es möglich, die Leitungen so zu verlegen, daß sie sich nicht kreuzen?

2. Man suche für den Springer auf dem Schachbrett eine „Rundreise“, welche nur aus den üblichen Rösselsprüngen besteht und jedes der 64 Felder genau einmal benutzt.

3. Ein 8-Liter Krug ist mit Wein gefüllt, und je ein leerer Krug von 5 und 3 Litern steht daneben. Die Flüssigkeitsmenge soll, lediglich durch Umschütten, halbiert werden, so daß sich also am Schluß in jedem der beiden grösseren Krüge je 4 Liter befinden.

4. Ein Dominostein enthält zwei quadratische Felder, auf denen je eine Anzahl von 0 bis n Punkten eingeprägt ist (üblich: $n = 6$). Ein Domino-Set enthält von jedem möglichen Stein genau ein Exemplar. Frage: Kann man sämtliche Steine eines Sets so in einer geschlossenen Linie auslegen, daß immer Felder mit gleicher Punktezahl zusammenstoßen?

5. Man färbe die Länder ein Landkarte mit möglichst wenig verschiedenen Farben so ein, daß angrenzende Länder stets unterschiedlich gefärbt sind.

Grundlegende Begriffe

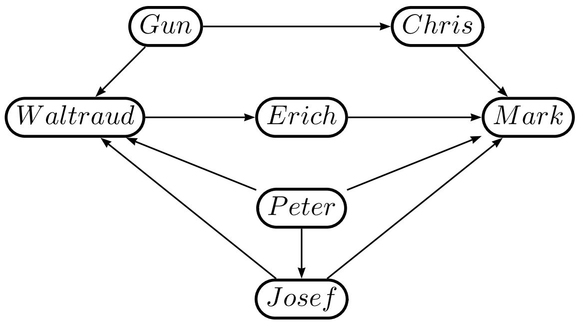
Digraph

8.1.2 Definition. Ein *gerichteter Graph* Γ (auch *Digraph*) besteht aus

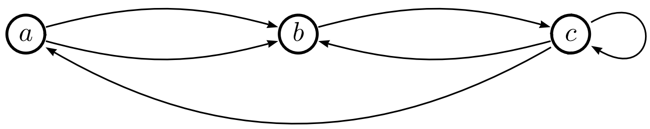
- einer Menge von *Knoten* $V = V(\Gamma)$,
- einer Menge von *Pfeilen* $A = A(\Gamma)$,

- sowie zwei Funktion $s, t\colon A \to V$, welche jedem Pfeil e einen *Anfangsknoten* $s(e)$ und einen *Zielknoten* $t(e)$ zuordnen.

8.1.3 Beispiel.



8.1.4 Beispiel. Auch das ist ein Digraph:



8.1.5 Definition. Ein Pfeil e, welcher einen Knoten mit sich selbst verbindet, d.h. $s(e) = t(e)$, heißt eine *Schlinge*.

8.1.6 Definition. Zwei Pfeile e, f mit denselben Angangs- und Zielknoten d.h. $s(e) = s(f)$ und $t(e) = t(f)$ heißen *parallel*

8.1.7 Bemerkung. Zwei Pfeile zwischen denselben Knoten, die sich aber durch die Richtung unterscheinden, gelten nicht als parallel

Digraphen und Relationen

8.1.8 Bemerkung. Die Digraphen mit Knotenmenge V, in denen verschiedene Pfeile niemals parallel sind, entsprechen genau den Relationen in V.

- Sei Γ ein Digraph mit Knotenmenge V. Je zwei Knoten $a, b\colon V$ ordnen wir die Aussage "Es gibt in Γ einen Pfeil von a nach b." zu.
- Diese Konstruktion wirft alle parallelen Pfeile in einen Topf.
- Wenn in Γ verschiedene Pfeile niemals parallel sind, führt die folgende Konstruktion von der Relation wieder zum ursprünglichen Digraphen zurück.
- Sei R eine Relation in V. Wir verwenden V als Knotenmenge und $A := \{\,(a, b)\colon V \times V \mid a\,R\,b\,\}$ als Pfeile mit $s(a, b) = a$ und $t(a, b) = b$.

8.1.9 Bemerkung. Sei R eine Relation und Γ der zugehörige Digraph.

- R ist reflexiv wenn Γ in jedem Knoten eine Schlinge hat.

- R ist irreflexiv wenn Γ schlingenfrei ist.
- R ist symmetrisch, wenn es zu jedem Pfeil e einen Pfeil e' mit der entgegengesetzen Richtung gibt ($s(e') = t(e)$ und $t(e') = s(e)$).
- Das Invertieren einer Relation entspricht dem Umkehren aller Pfeile.
- Die leere Relation entspricht einem Digraphen ohne Pfeile.
- Die Diagonale entspricht einem Digraphen, der nur Schlingen hat.
- Die Allrelation entspricht einem Digraphen, welcher für jedes Paar (a, b) von Knoten einen Pfeil von a nach b hat.

8.1.10 Definition. Sei a ein Knoten in einem Digraphen. Dann sei

$$\begin{aligned} d^+(a) &= |\{\, e\colon E \mid s(e) = a \,\}| \\ d^-(a) &= |\{\, e\colon E \mid t(e) = a \,\}| \end{aligned}$$

Der *Grad* des Knoten ist dann $d(a) := d^+(a) + d^-(a)$.

- Eine Relation ist deterministisch, wenn von jedem Knoten höchstens ein Pfeil ausgeht ($d^+(a) \leq 1$).
- Sie ist total, wenn von jedem Knoten mindestens ein Pfeil ausgeht ($d^+(a) \geq 1$).
- Funktionen sind somit jene Relationen, für die $d^+(a) = 1$ für alle Knoten gilt.
- Eine Funktion ist injektiv, wenn stets $d^-(a) \leq 1$.
- Eine Funktion ist surjektiv, wenn stets $d^-(a) \geq 1$.
- Digraphen mit $d^+(a) = 1 = d^-(a)$ für alle Knoten a entsprechen somit gerade den bijektiven Funktionen.

Gelten $s(e) = a$ und $t(e) = b$, so nennt man a einen Vorgänger von b und b einen Nachfolger von a.