8.5 Färbbarkeit

Das Einfärben einer Landkarte kann als graphentheoretisches Problem interpretiert werden: Man nehme die Länder als Knoten des Graphen und zeichne eine Kante zwischen zwei Knoten, falls die entsprechenden Länder eine gemeinsame Grenze haben. (Dies ist gerade der Graph, der zum demjenigen Graphen, der die Grenzen zeichnet, dual ist.) Dem Einfärben einer Landkarte entspricht dann die Zuordnung von Farben zu den Knoten des Graphen.

k-Färbung

8.5.1 Definition. Eine k-Färbung eines Graphen Γ ist eine Funktion $f\colon X \to \{0, \dots, k-1\}$, sodaß für zwei benachbarte Knoten a, b stets $f(a) \neq f(b)$ gilt. Der Graph heißt k-färbbar, wenn er eine k-Färbung zuläßt. Das kleinste k, für welches Γ eine k-Färbung zuläßt, heißt dessen *chromatische Zahl* $\chi(\Gamma)$. Ein $\chi(\Gamma)$-Färbung ist *optimal*.

8.5.2 Beispiel. Für den vollständigen Graphen mit n Knoten benötigt man n Farben, also $\chi(K_n) = n$.

Für eine Kette kommt man stets mit 2 Farben aus.

Für einen Kreis mit einer geraden Anzahl an Knoten kommt man ebenfalls mit 2 Farben aus; wenn er aber eine ungerade Anzahl an Knoten hat, benötigt man 3 Farben.

Bipartite Graphen

8.5.3 Definition. Ein Graph heißt *bipartit* wenn er 2-färbbar ist.

8.5.4 Satz. *Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.*

8.5.5 Satz. *Es gibt ein effizientes Verfahren um festzustellen, ob ein Graph eine 2-Färbung zuläßt, und diese gegebenenfalls zu finden.*

Beweis. Wir starten in irgendeinem Knoten a und geben diesem die Farbe 0. Alle Nachbarknoten von a müssen anders gefärbt werden, erhalten also die Farbe 1. Anschließend färben wir alle Nachbarknoten der Nachbarknoten von a mit Farbe 0. Falls einer dieser Knoten aber vorher bereits die Farbe 1 erhalten hat, dann ist der Graph nicht 2-färbbar. Wir fahren auf analoge Weise bei den Nachbarknoten der Nachbarknoten der Nachbarknoten von n fort. □

Das obige Verfahren zum Auffinden einer 2-Färbung ist ein typisches Beispiel für einen Breadth-First-Suchalgorithmus.

Außerdem liefert dieses Verfahren auch einen Beweis für den folgenden Satz.

8.5.6 Definition. Ein Graph heißt *eindeutig färbbar*, wenn jede optimale Färbung zu den denselben Farbklassen führt.

8.5.7 Satz. *Jeder zusammenhängende bipartite Graph ist eindeutig färbbar.*

Bipartite Graphen entsprechen damit Relationen der Form $X \to Y \to \Omega$. Die Knotenmenge ist dann die direkte Summe $X + Y$.

8.5.8 Beispiel. Ein Rahmen ist nur dann stabil wenn er gewisse Diagonalverbindungen enthält.

Man bildet einen bipartiten Graphen, dessen Knoten den Zeilen bzw. den Spalten des Rahmens entsprechen. Eine Kante zeigt dann an, ob in diesem Bereich eine Diagonalverbindung besteht.

Die Konstruktion ist genau dann stabil, wenn dieser Graph zusammenhängend ist. Und die Anzahl der Diagonalverbindungen ist minimal (um Festigkeit zu erreichen), genau dann, wenn dieser Graph ein Baum ist.

3-Färbbarkeit

Man kann versuchen, die (recht einfache und einleuchtende) Idee für die Lösung der 2-Färbbarkeit auf die 3-Färbbarkeit zu verallgemeinern. Dabei ergibt sich jedoch ein wesentlicher Unterschied: während beim Problem der 2-Färbbarkeit die Farbe für alle Nachbarknoten eindeutig bestimmt ist, ist bei der 3-Färbbarkeit für jeden Nachbarknoten aus 2 Farben auszuwählen. Diese Auswahlmöglichkeit bedeutet letztendlich, daß im schlimmsten Fall alle Möglichkeiten durchprobiert werden müssen. Tatsächlich läßt sich beweisen, daß es keine wesentlich bessere Methode gibt:

8.5.9 Satz. *Das Problem der* 3*-Färbung ist NP-vollständig.*

Landkarten

8.5.10 Theorem (4-Farben-Satz). *Jeder planare Graph ist* 4*-färbbar.*

In etwas anschaulicherer Formulierung:

8.5.11 Folgerung. *Jede Landkarte kann so mit 4 Farben eingefärbt werden, daß keine zwei angrenzenden Länder dieselbe Farbe erhalten.*

Ein Beweis dafür, daß stets 5 Farben ausreichen, wurde schon vor langem gefunden; doch das 4-Farben-Problem war lange Zeit ein bekanntes ungelöstes Problem. Erst Ende der 90er Jahre konnte das Problem auf ca 2000 Fälle zurückgeführt werden, die dann alle mittels Computer aufwendig nachgerechnet wurden.

Der Satz gilt nur für planare Graphen. Landkarten mit nicht-zusammenhängenden Ländern (Enklaven, Kolonien) können zu nicht-planaren Graphen führen, für die der 4-Farben-Satz nicht gilt. Man kann das Problem aber auch für Graphen auf allgemeineren Flächen betrachten. Eine Ebene und eine Kugeloberfläche sind ja, was die Planarität betrifft, äquivalent. Aber für Graphen (Landkarten) auf einem Torus benötigt man zum Beispiel 7 Farben. Es konnte sogar der folgende Satz bewiesen werden:

8.5.12 Theorem (Formel von Heawood). *Die zum Färben von beliebigen Landkarten auf einer Oberfläche mit g Löchern notwendige Anzahl von Farben ist*

$$\lfloor \frac{1}{2}(7+\sqrt{1+48g}) \rfloor.$$

(Eine Kugeloberfläche hat 0 Löcher, der Torus (Oberfläche eines Schwimmreifens) 1 Loch, zwei zusammengeklebte Toren 2, usw.)