

Formale Grundlagen (für Wirtschaftsinformatik)

1. Übungsblatt für den 19. März 2007

1. Gegeben seien die Mengen $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $M_2 = \{a, b, c, d, e\}$ sowie die Relationen

- $R_1 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, c), (4, b), (4, c)\} \subseteq M_1 \times M_2$,
- $R_2 = \{(a, 5), (b, 3), (b, 4), (c, 2)\} \subseteq M_2 \times M_1$.

Stellen Sie die Relationen R_1 und R_2 jeweils als Tabelle und als Graph (Pfeildiagramm) dar. Berechnen Sie die Relationenprodukte $R_1; R_2$ und $R_2; R_1$. Gilt $R_1; R_2 = R_2; R_1$? Wie ergibt sich das Pfeildiagramm der Relationenprodukte aus den Pfeildiagrammen von R_1 und von R_2 ?

2. Sei X die Menge aller zur Zeit lebenden Menschen. Gegeben seien die Relationen V und M auf X :

- $V = \{(x, y) \mid x, y \in X, x \text{ ist Vater von } y\}$,
- $M = \{(x, y) \mid x, y \in X, x \text{ ist Mutter von } y\}$.

Drücken Sie folgende Relationen mit Hilfe von V, M und den Operationen $;$ (Relationenprodukt) sowie \cup (Vereinigung von Mengen) aus:

- $Gv = \{(x, y) \mid x, y \in X, x \text{ ist Großvater von } y\}$,
- $Gem = \{(x, y) \mid x, y \in X, x \text{ ist mütterlichseitiger Großelternteil von } y\}$.

(*Hinweis:* Wir identifizieren Relationen mit Mengen von Paaren; daher ist die Mengenoperation \cup auch für Relationen definiert.)

3. Zeigen Sie, dass

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y \text{ ist Vielfaches von } 3\}$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen ist. Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse $[1]_R$, sowie die Faktormenge \mathbb{Z}/R . Versuchen Sie R und \mathbb{Z}/R graphisch darzustellen.

4. Die Relation \approx auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$(x, y) \approx (u, v) \text{ genau dann, wenn } x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

Überlegen Sie sich, dass \approx eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist. Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse $[(4, 3)]_{\approx}$ von $(4, 3)$ und stelle Sie diese graphisch dar.