Inhaltsverzeichnis

1 Geschichte und Entwicklung

1.1 Grundidee

Sie stellt die Gleichungen in der Matrix (Simplex-Tableau) zusammen und wandelt diese nach bestimmten Regeln so lange in neue Matrizen (Tableaus) um, bis die optimale Lösung gefunden ist. Aufgrund dieser Tatsache ist der Simplex-Algorithmus in der Praxis meist schneller als andere Verfahren.

1.2 George B. Dantzig

George B. Dantzig wurde am 8. November 1914 in Portland geboren und verstarb am 13. Mai 2005 in Stanford. Folgende Auszeichnungen wurden ihm verliehen:

- John von Neumann Theory Prize, 1975
- National Medal of Science, 1976
- National Academy of Sciences Award in Applied Mathematics and Numerical Analysis, 1977

Die von dem Amerikaner George B. Dantzig 1947 vorgestellte Simplex-Methode gehört zu den wichtigsten Lösungsverfahren der linearen Programmierung bzw. linearer Optimierungsaufgaben.

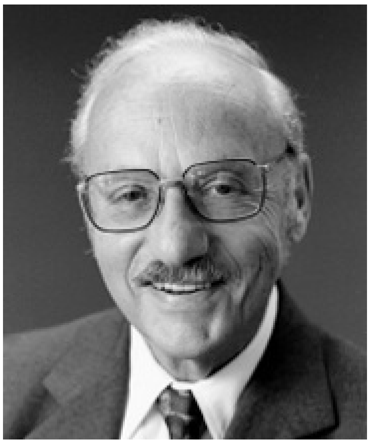

Abbildung 1: Georg Bernard Dantzig

1.3 Diäten-Problem von G.J. Stigler

Eine der ersten dokumentierten Anwendungen dieser neuen Methode war das Diäten-Problem von G.J. Stigler, dessen Ziel eine möglichst kostengünstigste Nahrungszusammensetzung für Soldaten war, die bestimmte Mindest- und Höchstmengen an Vitaminen und anderen Inhaltsstoffen erfüllte. An der optimalen Lösung dieses linearen Programms mit neun Ungleichungen und 77 Variablen waren damals neun Personen beschäftigt, die zusammen etwa 120

Mann-Tage Rechenarbeit benötigten. Interesse an dieser Arbeit zeigte zunächst das amerikanische Militär, speziell die US Air Force, die militärische Einsätze optimieren wollte.

1.4 John von Neumann und Oskar Morgenstern

In den Folgejahren entwickelten John von Neumann und Oskar Morgenstern das Verfahren weiter.

1.5 Mitte der 50er Jahre

Mit dem Aufkommen von Computern Mitte der 1950er Jahre konnten auch größere Probleme gelöst werden. Es wurden spezielle Varianten der Simplexmethode entwickelt, wie das *revidierte Simplex-Verfahren*, das sehr sparsam mit dem damals knappen und teuren Hauptspeicher umging. Im Jahre 1954 brachte *William Orchard-Hays* die erste kommerzielle Implementierung dieses Verfahrens auf den Markt.

1.6 20. Jahrhundert

Die Simplex-Methode als numerisch-iteratives Rechenverfahren (Iteration) eignet sich besonders gut für EDV-Lösungen und gilt als eine der wichtigsten numerischen Methoden, die im 20.Jahrhundert gefunden wurden. Die Anwendung der Simplex-Methode per Hand ist nur für einfache Beispiele mit wenigen Variablen vertretbar. Praktisch anfallende Aufgaben lassen sich nur per Computer lösen z.B. mittels des Solvers im Excel. Der große Vorteil der Simplex-Methode liegt generell darin, dass sie bei leichter Veränderung des Problems - beispielsweise dem Hinzufügen einer zusätzlichen Bedingung - einen "Warmstart" von der letzten verwendeten Lösung durchführen kann und daher meist nur wenige Iterationen zur erneuten Lösung benötigt, während andere Verfahren von vorne beginnen müssen.

2 Anwendungen und Bedeutung

2.1 Anwendung

Das Simplex Verfahren ist die wichtigste Methode bei der Lösung von linearen Programmen. Ein lineares Programm kann mit Hilfe des Simplex entweder nach endlich vielen Schritte gelöst werden, oder führt zu keinem Ergebnis weil das LP unbeschränkt, schlecht formuliert oder einfach unlösbar ist.
Die lineare Optimierung hat viele Anwendungen in der Praxis, von denen hier einige beispielhaft vorgestellt werden sollen.

2.1.1 Produktionsplanung

Ein Unternehmen kann eine Reihe von Produkten mit bekanntem Deckungsbeitrag herstellen. Die Herstellung einer Einheit jedes dieser Produkte benötigt eine bekannte Menge an beschränkten Ressourcen (Produktionskapazität, Rohmaterialien, etc). Die Aufgabe ist die Erstellung eines Produktionsplans, d.h. die

Festlegung, wieviel von jedem Produkt produziert werden soll, so dass der Profit der Firma maximiert wird, ohne die Ressourcenbeschränkungen zu verletzen.

2.1.2 Mischungsprobleme

Eine ähnliche Anwendung sind Mischungsprobleme, bei denen es darum geht, Zutaten zu einem Endprodukt zusammenzustellen, wobei die Menge der jeweiligen Zutaten innerhalb eines bestimmten Bereichs variiert werden kann. Ein Beispiel hierfür ist das 1947 von George Dantzig untersuchte Diät-Problem: Gegeben sind eine Reihe von Rohmaterialien (z.B. Hafer, Schweinefleisch, Sonnenblumenöl, etc.) zusammen mit ihrem Gehalt an bestimmten Nährwerten (z.B. Eiweiß, Fett, Vitamin A, etc.) und ihrem Preis pro Kilogramm. Die Aufgabe besteht darin, eines oder mehrere Endprodukte mit minimalen Kosten aus den Rohmaterialien zu mischen, unter der Nebenbedingung, dass bestimmte Mindest- und Höchstgrenzen für die einzelnen Nährwerte eingehalten werden. Auch bei Schmelzvorgängen treten solche Mischungsprobleme auf, wie z.B. in der Stahlherstellung.

2.1.3 Routing in Telekommunikations- oder Verkehrsnetzen

Ein klassisches Anwendungsgebiet der linearen Optimierung ist die Bestimmung eines Routings für Verkehrsanforderungen in Telekommunikations- oder Verkehrsnetzen, oft in Verbindung mit Kapazitätsplanung. Dabei müssen Verkehrsflüsse so durch ein Netz geroutet werden, dass alle Verkehrsanforderungen erfüllt werden, ohne die Kapazitätsbedingungen zu verletzen. Diese sogenannten Mehrgüterflüsse (englisch multicommodity flow) sind ein Beispiel für ein Problem, das mit linearer Optimierung gut lösbar ist, für das aber im allgemeinen Fall kein exakter Algorithmus bekannt ist, der nicht auf LP-Theorie basiert.

2.1.4 Spieltheorie

Innerhalb der mathematischen Spieltheorie kann die lineare Optimierung dazu verwendet werden, optimale Strategien in Zwei-Personen-Nullsummenspielen zu berechnen. Dabei wird für jeden Spieler eine Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet, bei der es sich um ein zufälliges Mischungsverhältnis seiner Strategien handelt. „Würfelt“ ein Spieler seine Strategie gemäß dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung zufällig aus, ist ihm die bestmögliche Gewinnerwartung sicher, die er haben kann, wenn er seine Strategie unabhängig von der seines Gegners wählt.

2.1.5 Nichtlineare und ganzzahlige Optimierung

Viele Anwendungsprobleme lassen sich mit kontinuierlichen Variablen nicht sinnvoll modellieren, sondern erfordern die Ganzzahligkeit einiger Variablen. Beispielsweise können keine 3,7 Flugzeuge gekauft werden, sondern nur eine ganze Anzahl, und ein Bus kann nur ganz oder gar nicht fahren, aber nicht zu zwei Dritteln. Bei der Verwendung von Branch-and-Cut zur Lösung eines solchen ganzzahligen linearen Optimierungsproblems müssen sehr viele ähnliche lineare Programme hintereinander als Unterproblem gelöst werden. Eine optimale ganzzahlige Lösung eines linearen Programms zu finden ist NP-Vollständig, aber parametrisierbar in der Anzahl der Variablen. Es ist sogar NP-Vollständig, irgend eine ganzzahlige Lösung eines linearen Programms zu finden. Auch zur Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme gibt es Algorithmen, in denen lineare Programme als Unterproblem gelöst werden müssen (z.B. Sequential Linear Programming).

2.2 Laufzeit

Die Zahl der Ecken eines Polyeders kann exponentiell in der Anzahl der Variablen und Ungleichungen sein. Beispielsweise lässt sich der n-dimensionale Einheitswürfel durch 2n lineare Ungleichungen beschreiben, besitzt aber 2n Ecken.

Klee und Minty konstruierten im Jahre 1972 einen verzerrten Einheitswürfel, den sogenannten **Klee-Minty-Würfel**, bei dem die von Dantzig vorgestellte Variante des Simplex-Verfahrens tatsächlich alle diese Ecken besuchte. Ähnliche Beispiele wurden bisher für alle Zeilen- und Spaltenauswahlregeln gefunden. Dies bedeutet, dass der Simplex-Algorithmus in allen bisher bekannten Varianten im schlechtesten Fall exponentielle Laufzeit besitzt.

Bei degenerierten linearen Programmen, wie sie in der Praxis häufig auftreten, kann es zu sogenannten **Zyklen** kommen, bei dem das Simplex-Verfahren immer wieder dieselbe Ecke betrachtet und dadurch nicht terminiert. Dies lässt sich aber durch Anwendung der lexikographischen Zeilenauswahlregel oder durch absichtliche numerische Störungen verhindern.

Aus theoretischer Sicht ist das Simplex-Verfahren daher beispielsweise den Innere-Punkte-Verfahren mit polynomialer Laufzeit unterlegen. Aus praktischer Sicht hat es sich aber in vielen Fällen als schneller erwiesen.

Der größte Vorteil des Simplex-Algorithmus gegenüber anderen Verfahren liegt jedoch darin, dass es bei kleinen Änderungen der Eingabedaten im Laufe des Algorithmus einen "Warmstart" erlaubt, also die letzte berechnete Basis als Ausgangspunkt für wenige weitere (primale oder duale) Iterationen nehmen kann, während beispielsweise Innere-Punkte-Verfahren in solch einem Fall von vorne anfangen müssen. Dieser Fall tritt sehr häufig auf, wenn sehr viele ähnliche lineare Programme in Folge gelöst werden müssen, beispielsweise im Rahmen von Schnittebenenverfahren, Branch-and-Bound oder Branch-and-Cut.

In der Praxis hängt die Laufzeit des Simplex-Verfahren oft im wesentlichen linear von der Anzahl der Zeilen ab. Tatsächlich zeigten Borgwardt und andere in den 1980er Jahren, dass solche Fälle wie der Klee-Minty-Würfel extrem selten sind und dass einige Varianten des Simplex-Algorithmus unter bestimmten Annahmen an den Input im Mittel nur polynomiale Laufzeit benötigen. Es ist aber bis heute unklar, ob es eine Variante mit polynomialer Laufzeit für alle Instanzen gibt.

2.3 Varianten und Verbesserungen des Simplex-Verfahrens

In der Version von Dantzig wird der Simplex-Algorithmus in praktischen Implementierungen heute nicht mehr verwendet. Im Laufe der Zeit sind einige Varianten des Simplex-Verfahrens entwickelt worden, die die Rechenzeit und den Speicherbedarf beim Lösen linearer Programme gegenüber dem Standardverfahren deutlich verkürzen und numerisch deutlich stabiler sind. Die wichtigsten Verbesserungen, die heute zum Standard in guten LP-Lösern gehören, sollen hier kurz vorgestellt werden.

2.3.1 Variablenschranken

In der Praxis müssen häufig obere und untere Schranken für die Variablen berücksichtigt werden. Dies gilt insbesondere dann, wenn lineare Programme beispielsweise im Rahmen eines Branch-and-Cut-Prozesses als Unterproblem gelöst werden. Für solche einfachen Arten von Ungleichungen wie Variablenschranken gibt es das sogenannte Bounded-Simplex-Verfahren, bei dem die Schranken direkt in den einzelnen Simplex-Schritten berücksichtigt werden. Im Gegensatz zur Standardversion, bei dem eine Nichtbasisvariable immer den Wert 0 hat, kann sie jetzt auch den Wert einer ihrer Schranken annehmen. Diese Mitführung der Schranken in den einzelnen Schritten bewirkt eine kleinere Anzahl der Zeilen und damit eine kleinere Basis gegenüber der offensichtlichen Variante, Variablenschranken als Ungleichungen in das LP zu schreiben.

2.3.2 Revidiertes Simplex-Verfahren

Obwohl praktisch auftretende lineare Programme mehrere hunderttausend Variablen haben können, arbeitet das Simplex-Verfahren immer nur mit einem kleinen Teil davon, nämlich den Basisvariablen. Lediglich bei der Spaltenauswahl müssen die Nichtbasisspalten betrachtet werden, wobei es - je nach Pivotstrategie - oft ausreicht, nur einen Teil davon zu berücksichtigen. Diese Tatsache macht sich das revidierte Simplex-Verfahren zunutze, das immer nur die aktuelle Basismatrix AB oder deren Inverse speichert, zusammen mit etwas Zusatzinformationen, aus der die aktuelle Basismatrix bzw. deren Inverse berechnet werden kann. Dadurch kommt es mit wesentlich weniger Speicherplatz aus als das ursprüngliche Tableauverfahren. Dieses Verfahren bildet heute die Grundlage mehrerer guter LP-Löser.

2.3.3 Preprocessing

In den letzten zehn Jahren sind durch verbessertes Preprocessing sehr große Fortschritte in den Lösungszeiten erzielt worden. Beispielsweise gibt es oft numerische Probleme, wenn in einem linearen Gleichungssystem sowohl sehr große als auch sehr kleine Zahlen auftreten. In einigen Fällen lässt sich dies durch Vorkonditionierung, also z.B. Äquilibrierung des Gleichungssystems, vor dem Start des eigentlichen Algorithmus vermeiden.

Mit Hilfe solcher Methoden kann gerade bei sehr großen LPs die Anzahl der Zeilen und Spalten manchmal deutlich reduziert werden, was sich in sehr viel kürzeren Lösungszeiten widerspiegelt.

3 Allgemeine Erklärung der Begriffe

3.1 Überblick über das Verfahren

3.1.1 Zwei wesentliche Phasen

Das Simplex-Verfahren setzt sich aus zwei Phasen zusammen:

- Phase I bestimmt eine zulässige Startlösung oder stellt fest, dass das Problem keine Lösung besitzt,

- Phase II verbessert eine bestehende Lösung immer weiter, bis keine Verbesserung der Zielfunktion mehr möglich ist oder die Unbeschränktheit des Problems festgestellt wird.

3.1.2 Restriktionen

Restriktionen entstehen wenn nur begrenzte Ressourcen zur Verwirklichung des jeweilige Produktionsprogramm zur Verfügung stehen. Je höher die, aus verfügbaren Ressourcen gefertigte, Stückzahl liegt, desto geringer die Restriktion. Im Bereich der Simplex Methode ist die jeweils (bezogen auf die unterschiedlichen Abwicklungsgleichungen: Lackieren, Verpacken, . . .) höchste Restriktion signifikant. Mit dieser Gleichung, der geringstmöglichen Ausbringung, wird die nachfolgende Optimierung begonnen.

3.2 Benötigte Begriffe

Pivot Pivot ist franz. Für Dreh- und Angelpunkt

Pivottabelle; Eine Menge gleichartiger Datensätze werden zu Gruppen zusammengefasst. Diese bilden zusammen eine Tabelle, welche nach Feldern gruppiert werden kann.

Pivotspalte ist jene Spalte der Tabelle, welche den betragsmäßig größten negativen Wert der Zielfunktion aufweist z.B.: niedrigster Deckungsbeitrag.

Pivotzeile; Zeile, in welcher die höchste Restriktion (der niedrigste Wert), aus der Division von Ergebniswert und Pivotspalte, resultiert.

Pivotelement; das Element in Pivotzeile und -spalte heißt Pivotelement.

Simplextableau stellt die Umlegung der kanonischen Angaben (Gleichungen) in einzelne Variablen plus Hinzufügen der Schlupfvariablen dar.

Optimale Werte sind dann erreicht, wenn in der Zielfunktion keine negativen Werte mehr vorhanden sind.

Simplexschritt Ausführung eines Bündels von lösungsneutralen Umformungen, die zum Übergang von einer kanonischen Form des Systems zur anderen erforderlich sind. Ein Austauschschritt entspricht exakt einem Schritt beim Lösen eines linearen Gleichungssystems, bei dem man die Pivotzeile r nach der Variablen xs auflöst und dann xs in die restlichen Gleichungen einsetzt. Dies bedeutet, dass anhand des Gleichungssystems der Basis-Variable (Pivotzeile) eine Umformung auf alle übrigen Gleichungszeilen bezüglich des Nicht- Basis- Variable (Pivotspalte) angewandt wird, um letztendlich die Variable der Pivotzeile und Pivotspalte zu tauschen und eine neue Basislösung zu erhalten.

Case by Variates

Augenfarbe	Geschlecht
blau	weiblich
blau	weiblich
braun	weiblich
blau	männlich
blau	weiblich

Pivot-Tabelle

		Geschlecht	
		weiblich	männlich
Augenfarbe	blau	3	1
	braun	1	0

"linopt"	"restr"	slk_1	slk_2	slk_3	y	x
"obj"	0	0	0	0	−90	−120
slk_1	1000	1	0	0	1	1
slk_2	800	0	1	0	1	0
slk_3	2400	0	0	1	2	3

4 Praxisbeispiel

Problemstellung Die Firma FG produziert die Produkte A und D in drei Abteilungen. Folgende Restriktionen sind bekannt:

- 190A + 180D = maximaler DB
- 2A + 8D = max. 1.200 h Lackiererei
- 10A + 6D = max. 6.200 h Montage
- A + D = max. 668 Stk Verpackung
- MA = max. 700 Stk erwartete Absatzmenge Produkt A im April
- MD = max. 200 Stk erwartete Absatzmenge Produkt D im April

Gleichungssystem Umwandlung der Restriktionen in ein Gleichungssystem und Ergänzung um Schlupfvariablen (L, M, V, MA, MD) die für die nicht genutzten Kapazitäten stehen:

	Gleichungen
DB	DB – 190A – 180D = 0
L	L + 2A + 8D = 1.200
M	M + 10A + 6D = 6.200
V	V + A + D = 668
MA	MA + A = 700
MD	MD + D = 200

Simplextableau Erstellung des Simplextableaus, basierend auf dem Gleichungssystem, und Ermittlung der Pivotspalte, der Pivotzeile und des Pivotelements.

Basis (Werte der Variablen immer 0)

Ergebnisswerte

		A	D		
II)	DB	**-190**	-180	0	= Zielfunktion
I)	L	2	8	1.200	1.200 / 2 = **600** → stärkste Restriktion in Lackiererei bei Produkt A
III)	M	10	6	6.200	6.200 / 10 = 620
IV)	V	1	1	668	668 / 1 = 668
V)	MA	1	0	700	700 / 1 = 700
VI)	MD	0	1	200	

Zeilenwert aus der Schlüsselspalte

Nicht-Basis

Pivotspalte ist Produkt A, da höchster negativer Wert in Zielfunktion

Pivotzeile ist Fertigungsstelle Lackiererei, da hier die höchste Restriktion auftritt.

Simplexschritt

Vorbereitungsschritt

L + 2A + 8D = 1200 / 2
0,5L + A + 4D = 600

Eliminierung des Pivotelements

DB - 190A - 180D = 0
0,5L + A + 4D = 600 * 190
→ **DB + 95L + 580 = 114000**
M + 10A + 6D = 6200
0,5L + A + 4D = 600 *(-10)
→ **M - 5L - 34D = 200**
V + A + D = 668
0,5L + A + 4D = 600 *(-1)
→ **V - 0,5L - 3D = 86**

Simplexschritt(2)

MA + A = 700
0,5L + A + 4D = 600 *(-1)
→**MA - 0,5L - 4D = 100**
→**MD + D = 200**

Simplextableau nach Simplexschritt Nach der Elimierung des Pivotelements wird mit den ermittelten Werten ein neues Simplextableau erstellt, wobei die Pivotzeile mit der Pivotspalte ausgetauscht wird.

	L	D	
DB	**95**	**580**	114.000
A	0,5	4	**600**
M	-5	-34	200
V	-0,5	-3	68
MA	-0,5	-4	100
MD	0	1	200

Da die Zielfunktion keine negativen Werte mehr enthält, sind die optimalen Werte gefunden.