Hausarbeit aus

368.712 Formale Grundlagen
Professor Franz Binder

zum Thema

Graphentheorie

Inhaltsverzeichnis

Graphen – Grundlagen und Begriffsdefinitionen

Ein Graph besteht aus Ecken (manchmal auch Knoten genannt) und Kanten; dabei verbindet jede Kante genau zwei Ecken. Je zwei Ecken können also durch keine, eine oder mehr als eine Kante verbunden sein.

[Diskrete Mathematik für Einsteiger; S 137]

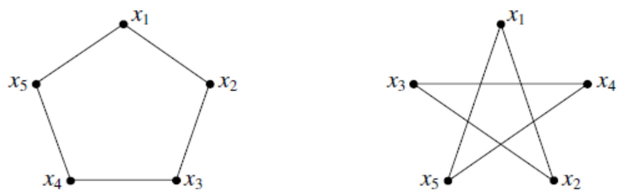


Abb.: 1: Zwei Darstellungsformen für denselben Graphen

Graphen sind eng verwandt mit Relationen.
Abgekürzt werden Graphen mit G, Ecken mit E und Kanten mit K.
Aufgabe der Graphentheorie ist es, möglichst allgemeine Verfahren zu enthwickeln, um Probleme in Graphen lösen zu können.

Schleifen sind Kanten, die einen Knoten mit sich selbst verbinden. Graphen mit Schleifen und/oder Mehrfachkanten nennt man auch *Multigraphen*.

Zwei Ecken u und v heißen *adjazent* wenn sie durch eine Kante verbunden sind. Der *Grad einer Ecke* ist die Anzahl der Kanten die von dieser Ecke ausgehen. Gehen keine Kanten von ihr aus, ist der Grad = 0. Das wäre dann eine *isolierte Ecke*. Die Anzahl der Ecken in einem Graph, die zusammen einen ungeraden Grad haben, muss gerade sein.
In der nachfolgenden Abbildung sind im linken Graphen nur Ecken mit dem Grad drei zu finden, während im rechten Graphen nur Ecken mit dem Grad 4 vorhanden sind.

Ein Graph ist *vollständig*, wenn jede Ecke mit jeder anderen Ecke durch genau eine Kante verbunden ist. Ein solcher vollständiger Graph mit n Ecken hat die Bezeichnung K_n.

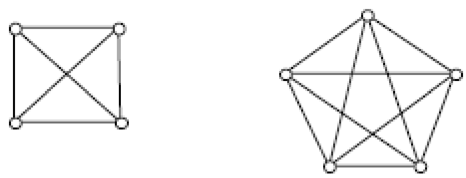
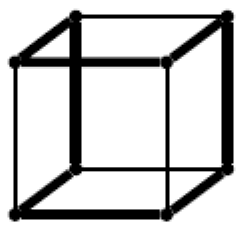


Abb. 2: Vollständige Graphen

Ein Graph heisst *eulersch*, wenn man seine Kanten in einem Zug zeichen kann, und am Ende wieder am Ausgangspunkt ankommt. Der rechte Graph in der oberen Abbildung ist so ein eulerscher Graph. Ein Graph enthält einen *Hamiltonkreis* falls es möglich ist, einen Kreis so zu zeichnen, dass er jeden Knoten des Graphen genau ein mal durchläuft. Eine praktische Anwendung für den Hamiltonkreis ist das Traveling Salesman Problem. Hier soll eine optimale Route für einen Handlungsreisenden gefunden werden. Dieses Problem ist leider sehr schwierig zu lösen, genauer gesagt ist das Problem NP-vollständig.
In der unteren Abbildung ist das finden eines Hamiltonkreises für den Würfel links möglich. Rechts jedoch befindet sich ein Petersen-Graph, benannt nach Julius Peterson. In ihm ist kein Hamiltonkreis zu finden.



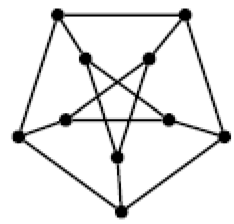
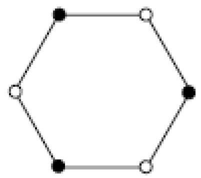


Abb. 3: Links: Ein Würfel mit einem eingezeichneten Hamiltonkreis; Rechts: Ein Peterson-Graph der keinen Hamiltonkreis enthält.

Ein Graph ist *bipartit*, wenn man seine Ecken so schwarz und weiss färben kann, bzw. so in zwei Klassen, meist bezeichnet mit E1 und E2, einteilen kann, dass jede Kante eine schwarze und eine weiße Ecke bzw. eine Klasse mit der anderen Klasse verbindet. Möchte man die beiden Klassen herausheben, spricht man von einer *Bipartition*{E1, E2}.
Vollständig bipartit sind diese Graphen, wenn jede Ecke der einen Klasse mit jeder Ecke der anderen Klasse durch genau eine Kante verbunden ist.



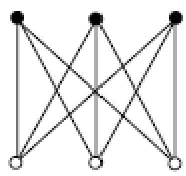


Abb. 4: Links: Bipartiter Graph mit schwarzen und weissen Ecken; Rechts: Vollständig bipartiter Graph mit schwarzen und weissen Ecken

Ein *Kantenzug* verbindet die Ecken e_0 bis e_s, wobei der Kantenzug wiederum aus den Kanten k_1 bis k_s besteht. Sind alle Kanten verschieden, wird ein Kantenzug *Weg* genannt. Sind alle seine Kanten verschieden und ist der *Kantenzug geschlossen*, wird er *Kreis* genannt. Die *Länge* des Kreises ist dabei die Anzahl seiner Kanten.
Zusammenhängend ist ein Graph dann, wenn je zwei Ecken durch einen Kantenzug verbunden werden können.

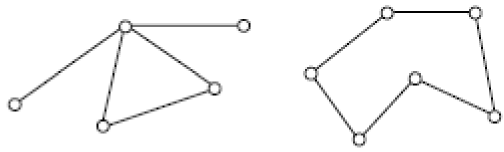


Abb. 5: Links: Weg; Rechts: Kreis

Ein Weg der kein Kreis ist, heisst eine *offene eulersche Linie*, wenn jede Kante des Graphen darin genau ein mal vorkommt. Ein Graph kann scheinbar nur dann in einem Zug gezeichnet werden, wenn er einen eulerschen Kreis oder eine offene eulersche Linie besitzt.

Ein Graph ist *planar*, falls er ohne Überschneidungen in der Ebene gezeichnet ist, also so, dass sich zwei Kanten höchstens in einer Ecke schneiden, aber sonst nicht.
Ein Graph ist *plättbar*, wenn er überschneidungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.

Teilgraphen erhält man, indem man aus dem ursprünglichen Graphen beliebig Kanten und/oder Knoten entfernt. Ein Graph heisst zusammenhängend, wenn für jedes Paar von Knoten ein Pfad existiert. Die bisher gezeigten Abbildungen waren alle zusammenhängende Graphen.
Graphen die nicht zusammenhängend sind, können zumindest zusammenhängende Teile enthalten. Die grössten zusammenhängenden Teilgraphen heissen dann *Komponenten*.

Graphenstrukturen

Homomorph

Ein Homomorphismus ist eine strukturerhaltende Abbildung, hier die strukturerhaltende Abbildung eines Graphen. Homomorphismen lassen sich allgemeiner als spezielle Morphismen, also strukturverträgliche Abbildungen, definieren.

Isomorph

Als isomorph bezeichnet man zwei Graphen, die nach Umzeichnung und Umbenennung identisch sind. Zwei isomorphe Graphen liefern, unter Berücksichtigung von Umbenennungen, Datenverarbeitungstechnisch immer das gleiche Ergebnis.

In der Mathematik ist ein Isomorphismus eine Abbildung zwischen zwei mathematischen Strukturen, durch die Teile einer Struktur auf „bedeutungsgleiche" Teile einer anderen Struktur umkehrbar eindeutig (bijektiv) abgebildet werden.

Bei der Untersuchung graphentheoretischer Probleme kommt es meist nur auf die Struktur der Graphen, nicht aber auf die Bezeichnung ihrer Knoten an. In den allermeisten Fällen sind die untersuchten Grapheneigenschaften dann invariant bzgl. Isomorphie.

Zur Prüfung der Isomorphie zweier Graphen ist kein effizienter Algorithmus bekannt. Mehr noch, die Komplexität des bestmöglichen Algorithmus ist bis heute noch nicht bestimmt. Insbesondere ist die Isomorphie von Graphen eines der wenigen bekannten Probleme in NP, für die weder bekannt ist, ob sie in P enthalten, noch ob sie NP-vollständig ist.

Automorph

Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus eines Objektes auf sich selbst, in diesem Fall von einem Graphen.

Ursprünge der Graphentheorie

"Das Königsberger Brückenproblem"

Der Ursprung der Graphentheorie lieg im Jahr 1736, bei dem Mathematiker Leonhard Euler. Im wurde damals folgendes Problem gestellt:

> *Durch die Stadt Königsberg fließt ein Fluss, die Pregel. Diese teilt sich an einer Stelle und umfließt zwei Inseln. Diese sind untereinander und mit den Ufern durch Brücken verbunden.*
> *Ist es möglich, einen Spaziergang so zu organisieren, dass man dabei jede Brücke genau einmal überquert?*

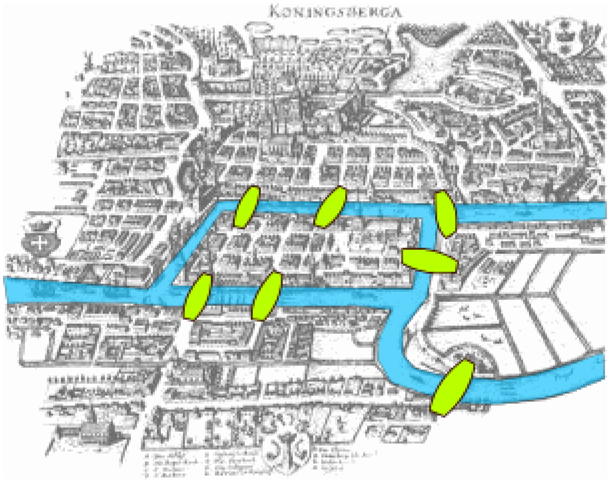


Abb. 6:Königsberg und seine Brücken

Euler hat dieses Problem gelöst und damit das Feld der Graphentheorie begründet. Das Königsberger Brückenproblem lässt sich als Graph wie folgt darstellen:

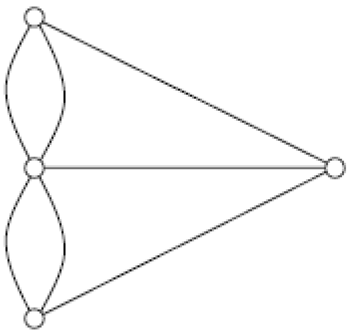


Abb. 7: Graph des Königsberger Brückenproblems

Ist ein Graph in einem Zug so zu zeichnen, dass man am Ende des Zeichenvorganges wieder am Ausgangspunkt angelangt, so ist dieser Graph eulersch. Genauer gesagt, nennt man so einen Graph einen eulerschen Kreis.
Sollte der Graph der das Königsberger Brückenproblem darstellt, also ein eulerscher Graph sein, wäre es möglich einen Spaziergang so zu organisieren, dass man dabei jede Brücke genau einmal überquert.

Der Satz von Euler

Die Frage ob das nun wirklich so ist, lässt sich mit dem Satz von Euler beantworten:

> *Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad. Mit anderen Worten: Wenn G eine Ecke ungeraden Grades hat, dann ist G nicht eulersch.*

Der Graph des Königsberger Brückenproblems hat Ecken vom Grad 3, 3, 3 und 5. Er ist also nicht eulersch. Der geforderte Spaziergang ist folglich nicht möglich.

Für den Beweis des Satzes von Euler muss eine beliebige Ecke e des Graphen ausgewählt werden. Für diese Ecke e muss nun bewiesen werden, dass die Anzahl der angrenzenden Ecken gerade ist. (Wenn es mehrere Ecken gibt, muss natürlich für jede Ecke bewiesen werden, dass ihr Grad gerade ist.) Diese Ecke e wird vom eulerschen Kreis durchquert, einige Male, genauer gesagt a Mal. Wobei a für die Anzahl der Durchquerungen von e steht. Bei jedem Durchgang durch e verbraucht der eulersche Kreis zwei Kanten. In a Durchgängen werden also 2a Kanten verbraucht. Da keine Kante zweimal benutzt werden darf, ist der Grad der Ecke e also mindestens gleich 2a. Der Grad kann aber auch nicht größer sein, da jede Kante, also insbesondere jede Kante, die an e angrenzt, in dem eulerschen Kreis mindestens einmal vorkommen muss.

Euler hat auch die Umkehrung des obigen Satzes postuliert:

> *Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.*

Der Beweis dazu lautet:

> *Beweis durch Induktion nach der Anzahl m der Kanten.*
> *Induktionsbasis: Wenn G keine Kante hat, ist G eulersch (mit trivialem eulerschen Kreis). Da jede Ecke von G geraden Grad hat und jede Kante zwei verschiedene Ecken verbindet, kann G nicht nur eine Kante besitzen. Wenn G genau zwei Kanten hat, müssen diese, da G zusammenhängend ist, zwei Ecken miteinander verbinden, und auch in diesem Fall sieht man unmittelbar, dass G eulersch ist.*
> *Induktionsschritt: Die Anzahl m der Kanten von G sei nun mindestens 2, und die Aussage sei richtig für alle Graphen mit weniger als m Kanten.*
> *Da G zusammenhängend ist und jede Ecke geraden Grad hat, hat jede Ecke mindestens den Grad 2. Also gibt es einen Kreis in G.*
> *Wir betrachten einen Kreis C maximaler Länge in G und behaupten, dass dies ein eulerscher Kreis ist.*
> *Angenommen, C wäre kein eulerscher Kreis. Dann entfernen wir die Kanten von*

C von G. Übrig bleibt ein (eventuell nichtzusammenhängender) Graph G, in dem jede Ecke geraden Grad hat (eventuell 0). Nach Induktionsannahme gäbe es dann in einer Zusammenhangskomponente einen eulerschen Kreis. Diesen könnten wir mit C vereinigen, wodurch wir einen größeren Kreis erhalten würden. Dieser Widerspruch zur Maximalität von C zeigt, dass C in Wirklichkeit ein eulerscher Kreis ist.*
Aus obigem Satz folgt zum Beispiel, dass jeder vollständige Graph Kn mit ungeradem n (also K3, K5, K7, ...) eulersch ist. Denn jede Ecke von Kn hat den Grad n–1; und wenn n ungerade ist, ist n–1 gerade.

[Diskrete Mathematik für Einsteiger; S 142 ff]

Offene eulersche Linien

Wenn ein Graph eine offene eulersche Linie besitzt, dann hat er genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Die Umkehrung des Satzes:

In jedem zusammenhängenden Graph gilt: Wenn es genau zwei Ecken ungeraden Grades gibt, dann hat der Graph eine offene eulersche Linie.

Der Beweis beider Sätze beruht auf demselben Prinzip. Der erste Satz kann auf den Satz von Euler zurückgeführt werden, der zweite Satz kann auf die Umkehrung des Satzes von Euler zurückgeführt werden.

Beweis erster Satz:

Sei G ein Graph, der eine offene eulersche Linie besitzt. Diese beginnt an einer Ecke e1 und endet an einer anderen Ecke en.
Trick: Wir führen künstlich (und nur für kurze Zeit) eine zusätzliche Kante k ein, die e1 mit en verbindet. Den so erhaltene Graph nennen wir G*; G* hat G nur die Kante k* voraus.*
Wenn wir an die offene eulersche Linie die Kante k anhängen, erhalten wir einen eulerschen Kreis von G*. Nun können wir 8.2.1 anwenden und erhalten, dass jede Ecke von G* geraden Grad hat.*
Daraus schließen wir, dass jede Ecke von G, die keine Ecke von k ist, auch geraden Grad hat. Außerdem folgt, dass die Ecken e1 und en in G ungeraden Grad haben (denn in G* hatten sie geraden Grad, und die Kante k* ist entfernt worden).*
Also sind e1 und en die einzigen Ecken ungeraden Grades in G.

[Diskrete Mathematik für Einsteiger; S 143 ff]

Beweis zweiter Satz:

> *Sei G ein zusammenhängender Graph, der genau zwei Ecken e1 und en ungeraden Grades hat.*
> *Trick: Wir führen künstlich eine zusätzliche Kante k* ein, die e1 mit en verbindet.*
> *Sei G* der so erhaltene Graph. Da er nur Ecken geraden Grades hat und zusammenhängend ist, können wir 8.2.2 anwenden und erhalten einen eulerschen Kreis von G*.*
> *In diesem eulerschen Kreis muss irgendwo die Kante k* vorkommen; sei k1, k2, ..., ks, k*, ks+2, ..., km der eulersche Kreis. Dann ist ks+2, ..., km, k1, k2, ..., ks eine offene eulersche Linie von G. Also besitzt G eine offene eulersche Linie.*

[Diskrete Mathematik für Einsteiger; S 143 ff]

Aus den beiden Beweisen lässt sich folgern, dass jede offene eulersche Linie an einer Ecke ungeraden Grades beginnt und an der anderen endet. Das Königsberger Brückenproblem liesse sich also auch dann nicht lösen, wenn man in Kauf nimmt, den Spaziergang an einer anderen Stelle zu beenden als man ihn begonnen hat.

Bäume und Wälder

Ein Baum ist ein Graph der zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält. Ein Wald ist ein Graph dessen Komponenten Bäume sind.
In einem Baum sind je zwei Ecken durch höchstens eine Kante verbunden. Ausserdem hat jeder Baum mindestens eine Endecke, also eine Ecke mit dem Grad 1.
Bäume sind die minimalen, zusammenhängenden Graphen. Wenn man aus einem Baum eine Kante entfernt, entsteht ein nicht zusammenhängender Graph. Von dieser Eigenschaft gilt auch die Umkehrung. Sie charakterisiert Bäume.

Bäume sind wichtige Anwendungen von Graphen, zum Beispiel in der Informatik. Bäume eignen sich auch um Sortierungsprozesse darzustellen. Nachfolgend ein graphisches Beispiel für einen Baum:

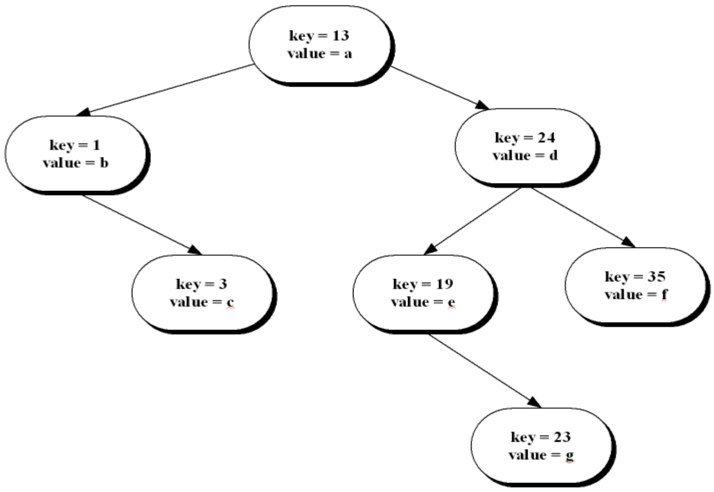


Abb. 8: Baum mit 7 Ecken, 3 davon sind Endecken; Darstellung einer Datenspeicherstruktur als Binärbaum.

Sätze zu Bäumen

Jeder Baum mit mindestens zwei Ecken hat mindestens eine Endecke.

Beweis dazu: Man nehme einen Baum G mit mindestens zwei Ecken an. Wir starten an der Ecke e0 und gehen von ihr aus über eine Kante zur Ecke e1. Ist Ecke e1 eine Endecke haben wir den Beweis erbracht. Ist e1 keine Endecke gehen wir zur nächsten Ecke, und überprüfen wieder ob diese eine Endecke ist. Ist auch diese keine Endecke gehen wir wieder zur nächsten Ecke weiter und überprüfen... usw. Dies wiederholen wir so lange bis wir eine Endecke finden. Das wird zwangsläufig irgendwann der Fall sein, da der Baum nur eine endliche Anzahl von Ecken haben kann und keinen Kreis enthält.

Sei G ein Baum mit n Ecken und m Kanten. Dann gilt m = n-1.

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Anzahl der Ecken n. Wir nehmen an, dass n = 1 ist. Dann besteht der Baum nur aus einer Ecke. Die Anzahl der Kanten m wäre dann gleich 0. Die Formel m = n -1 würde für diesen Fall also lauten 0 = 1-1. Und das würde eindeutig stimmen.
Nun der Induktionsschritt: Sei n >= 1, und sei die Behauptung richtig für alle Bäume mit n Ecken. Wir müssen zeigen, dass sie auch für alle Bäume mit n+1 Ecken gilt, das heißt, dass jeder solche Graph genau n Kanten hat. Sei also G ein Baum mit n+1 Ecken. Wir haben vorhin schon bewiesen das G, wie jeder Baum, mindestens eine Endecke e* hat. Wir entfernen nun diese Endecke e* und die mit e* inzidierende Kante k*. Dadurch erhalten wir wieder einen Baum G*, der nur n Ecken hat. Nach Induktionsannahme hat G* also genau n–1 Kanten. Da G aus G* durch Hinzufügen der Kante k* entsteht, hat G genau eine Kante mehr als G*. Also hat G genau n–1 + 1 = n Kanten.
Somit gilt die Aussage für n+1. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage damit auch allgemein.

Sei G ein Graph mit n Ecken und m Kanten. Wenn G zusammenhängend ist, gilt m >= n – 1 mit Gleichheit genau dann, wenn G ein Baum ist.

Dieser Satz sagt, das Bäume unter allen zusammenhängenden Graphen diejenigen mit der kleinstmöglichen Kantenzahl sind. Der Beweis dieser Aussage lässt sich wieder mittels Induktion antreten, und zwar mit Induktion nach der Anzahl m der Kanten. Wir nehmen zuerst an, m = 0. Dann besteht G nur aus einer Ecke und der Satz gilt.
Nun nehmen wir an, m >= 0 und die Aussage sei richtig für alle Graphen mit m Kanten. Sei G ein zusammenhängender Graph mit m+1 Kanten und n Ecken. Wir müssen zeigen, dass m+1 >= n–1 ist mit Gleichheit genau dann, wenn G ein Baum ist. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: G ist ein Baum. Dann gilt laut dem vorletzten Satz sogar m+1 = n–1.

2. Fall: G ist kein Baum. Wir müssen zeigen, dass m+1 > n–1 gilt.

Da G kein Baum ist, besitzt G einen Kreis. Wir entfernen eine Kante k* aus diesem Kreis und erhalten einen Graphen G*, der eine Kante weniger, aber gleich viele Ecken wie G hat. Dieser Graph G* ist zusammenhängend (denn in jedem Weg kann k* - wenn diese Kante überhaupt vorkommt - durch den Rest des Kreises ersetzt werden). Also gilt nach Induktion m = Anzahl der Kanten von G* >= Anzahl der Ecken von G* – 1 = n–1.
Also gilt m+1 >= n > n–1. Damit gilt die Aussage auch für m+1. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage also allgemein.

(Minimaler) Spannbaum

Ein Spannbaum eines Graphen ist ein zusammenhängender Teilgraph, der alle Ecken (Anzahl n) enthält und n-1 Kanten hat. Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen Spannbaum. Ein Spannbaum ist ein minimaler Spannbaum, wenn er unter allen Spannbäumen das geringste Gewicht hat.

Das Spannbaumproblem tritt in der Praxis beispielsweise bei der kürzesten Verdrahtung von Kommunikationsnetzen auf. Für das Problem des Handlungsreisenden existieren Approximationsalgorithmen, die minimale Spannbäume verwenden.

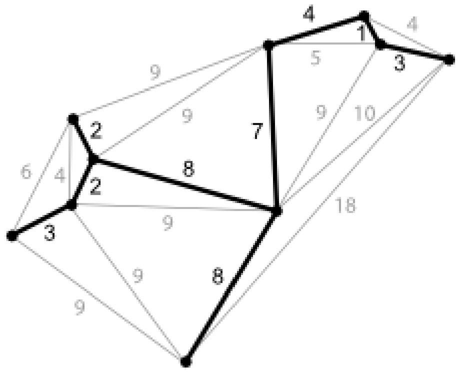


Abb. 9: Spannbaum mit eingezeichnetem minimaler Spannbaum

Binäre Bäume

Ein Binärbaum ist ein Wurzelbaum, dh er hat eine spezielle Ecke, die Wurzel (root), von der höchstens zwei Kanten (Grad zwei) ausgehen. Alle anderen Ecken haben den Grad drei (Wurzel) oder eins. Binärbäume werden normalerweise so gezeichnet, dass die Wurzel oben ist. Zur Veranschaulichung, Abb. ist ein Binärbaum. Man nennt die Ecken vom Grad eins die Blätter des Baumes. Sie sind Endecken. Die Länge eines längsten Weges, wobei die Wurzel eine Endecke ist, nennt man die Höhe des Baumes. Zur Höhe eines Binärbaumes lässt sich folgendes sagen:

(a) Sei G ein binärer Baum der Höhe h. Dann hat G höchstens 2^h Blätter.
(b) Ein binärer Baum mit b Blättern hat mindestens die Höhe [ld(b)].

Beweis von (a): Wiederum mittels Induktion, diesmal nach h. Ein binärer Baum der Höhe 0 besteht nur aus der Wurzel, hat also genau 1 (= 20) Blatt.
Sei nun h > 0, und sei die Aussage richtig für h–1. Sei G ein binärer Baum der Höhe h. Wir entfernen alle Blätter aus G und erhalten dadurch einen binären Baum G* der Höhe h–1.
Nach Induktion hat dieser höchstens 2^{h-1} Blätter. Beim Übergang zu G entstehen aus jedem Blatt von G* ein oder zwei Blätter von G. Daher hat G höchstens doppelt so viele Blätter wie G*, also höchstens $2^{h-1}*2 = 2^h$.
Beweis von (b): Nach (a) gilt b <= 2h, das heißt ld(b) <= h.

Für Binärbäume gibt es auch in der Informatik eine Definition, da sie dort einige Bedeutung haben:

> *Ein Binärbaum ist ein Baum, bei dem jeder Knoten höchstens zwei Nachfolger hat. Seine Datenstruktur besteht aus Knotenobjekten mit zwei Knotenreferenzen. Jeder Knoten hat also zwei Nachfolger*
>
> *Im Binärbaum wird jeder Knoten genau einmal referiert, d.h. ein einem Binärbaum hat jeder Knoten, mit Ausnahme des Wurzelknotens, genau einen Vorgänger. Ein Blatt ist ein Knoten, der keinen Nachfolger hat. Die anderen Knoten heissen auch innere Knoten.*

[Grundkurs Algorithmen und Datenstrukturen in Java, Eine Einführung in die praktische Informatik; S 125]

Planare Graphen

Ein Graph ist planar, falls er ohne Überschneidungen in der Ebene gezeichnet ist, also so, dass sich zwei Kanten höchstens in einer Ecke schneiden, aber sonst nicht. Abb. Zeigt zum Beispiel planare Graphen.
Ein Graph ist plättbar, wenn er überschneidungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.

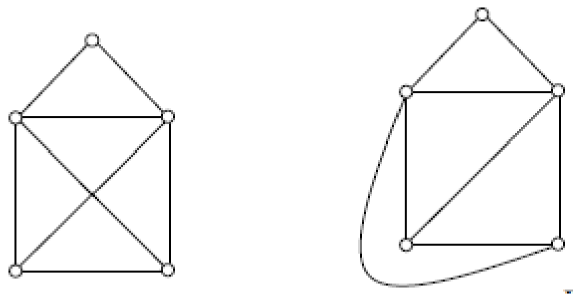


Abb. 10: Links: Ein plättbarer Graph; Rechts: die planare Version des linken, plättbaren Graphen

Jeder planare Graph zerlegt die Ebene in Gebiete. Die Anzahl der Gebiete wird mit g bezeichnet. Es gibt immer mindestens ein Gebiet, das äußere Gebiet. Daraus folgt, es gilt stets: g >= 1. Bäume haben nur ein Aussengebiet. Für sie gilt daher g = 1.
In der oberen Abbildung ist g links gleich 6, rechts ist g gleich 5.

Die eulersche Polyederformel:

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit n Ecken, m Kanten und g Gebieten. Dann gilt: n – m + g = 2.

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Anzahl g der Gebiete. Sei zunächst g = 1. Dann ist G ein Baum. Wie wir bereits früher bewiesen haben, gilt daher n = m+1, das heißt n – m + g = (m+1) – m + 1 = 2.
Sei nun g >= 1, und sei die Aussage richtig für g. Wir zeigen, dass sie auch für g+1 gilt.
Sei G ein planarer zusammenhängender Graph mit g+1 Gebieten. Da g+1 > 1 ist, ist G kein Baum. Also gibt es einen Kreis in G.
Wir entfernen eine Kante k* dieses Kreises. Da k* an zwei Gebiete von G angrenzt, hat der neue Graph G* ein Gebiet weniger (da zwei vereinigt wurden), also nur noch g* = g Gebiete. Also können wir auf G* die Induktionsvoraussetzung anwenden. Da G* genau m–1 Kanten und n Ecken hat, folgt also 2 = n – (m–1) + g = n – m + (g+1).
Also gilt die Aussage für g+1. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt der Satz damit allgemein.

Daraus ergibt sich:

Sei G ein zusammenhängender planarer Graph, in dem je zwei Ecken durch

höchstens eine Kante verbunden sind. Dann gilt:
(a) Falls G mindestens drei Ecken hat, dann gilt m <= 3n – 6. (Das heißt: Ein planarer Graph hat relativ wenige Kanten.)
(b) Es gibt mindestens eine Ecke vom Grad <= 5.

Der Beweis kann mittels einer Abzählung erbracht werden.
(a) Für ein Gebiet L sei m(L) die Anzahl der Kanten. Da jedes Gebiet mindestens drei Kanten hat, gilt:

$$\sum_{\text{L Gebiet}} m(L) \geq 3g.$$

Nun zählen wir die Paare (k, L), wobei k eine Kante, L ein Gebiet und k ein Teil der Grenze von L ist:

$$\sum_{\text{L Gebiet}} m(L) \leq 2m.$$

Zusammen ergibt sich 2m >= 3g. Schließlich setzen wir das in die Eulersche Polyederformel ein und erhalten:

$$n - m + \frac{2}{3}m \geq n - m + g = 2,$$

also m <= 3n – 6.

(b) Die Behauptung gilt natürlich, falls n = 1 oder n = 2 ist. Für n >= 3 wenden wir (a) an und erhalten

$$\delta \cdot n \leq \sum_{\text{e Ecke}} \text{Grad}(e) = 2m \leq 6n - 12,$$

wobei δ der kleinste Grad von G ist. Also muss δ - n < 6n, also δ < 6 sein.

Aus dem obigen lässt sich ausserdem folgern und auch Beweisen, dass die vollständigen Graphen K5 und K3,3 nicht plättbar sind. Deshalb muss jeder nicht plättbare Graph eine Unterteilung von K5 oder K3,3 enthalten. Diese Regel ist auch unter dem Namen "Satz von Kuratowski" bekannt.

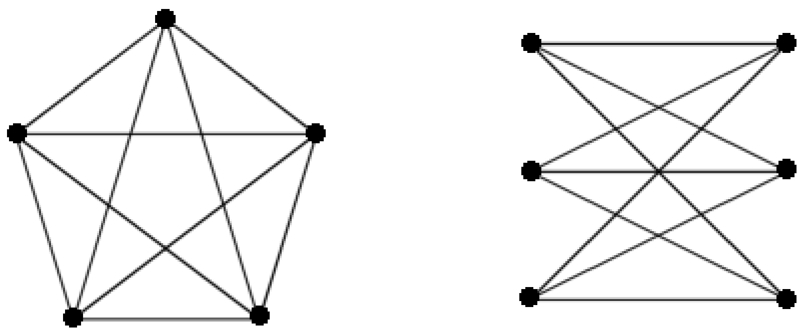
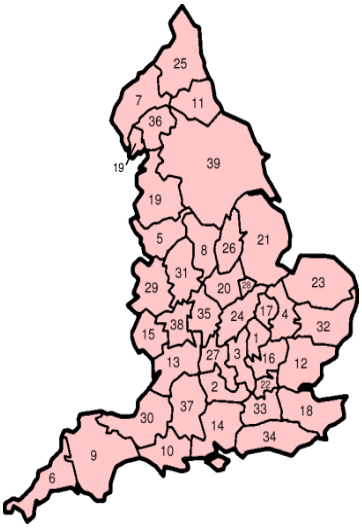


Abb. 11: Links: K5; Rechts: K3

Färbungen von Graphen

Der Ursprung dieses Graphen-Problems liegt in der Frage, ob man die Länder auf jeder beliebigen Landkarte mit vier Farben so färben kann, dass je zwei benachbarte Länder verschiedene Farben haben. Und zwar nicht auf einer speziellen Landkarte, sondern auf jeder beliebigen Landkarte. Länder die sich nur an einem Punkt berühren, dürfen allerdings gleich gefärbt sein.



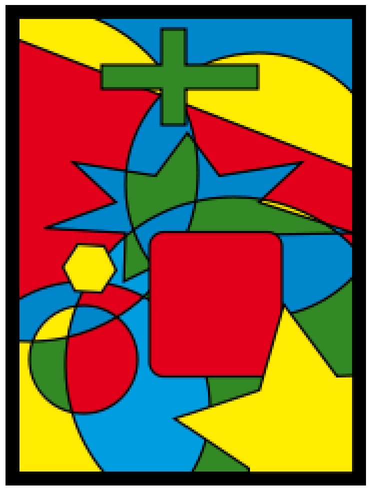


Abb. 12: Links: Englands Grafschaften; Rechts Beliebige Karte

Die Vierfarbenvermutung sagt nun, dass vier Farben in jedem Fall genug sind. Sie wurde erstmals vom britischen Mathematikstudenten Francis Guthrie in Zusammenhang mit einer Karte von den zahlreichen Grafschaften Englands formuliert.

Um dieses Problem mittels Graphen lösen zu können, muss zuerst die Landkarte in einen Graphen, und zwar einen planaren Graphen, übertragen werden. Die Länder sind dabei die Ecken. Haben Länder eine gemeinsame Grenze, werden ihre Ecken-Counterparts mit Kanten verbunden. Da die Kanten nicht gefärbt werden können, werden die Ecken, die die Länder repräsentieren gefärbt. Und zwar so, das je zwei mit einer Kante verbundene Ecken unterschiedliche Farben haben. Es soll nun herausgefunden werden, wie viele Farben dazu mindestens nötig sind.
Diese Frage kann man mit folgender Überlegung abstrahieren:

Man nehme einen beliebigen Graphen G, egal ob planar oder nicht, egal ob von einer Landkarte oder nicht, an. Die Eckenfärbung von diesem G ist eine Zuordnung von „Farben" zu den Ecken, so dass keine zwei durch eine Kante verbundenen Ecken die gleiche Farbe haben (Selbe Bedingung wie oben). Als Farben dienen stellvertretend die Zahlen 1, 2, ..., n.
Die chromatische Zahl von G ist nun definiert als die kleinste natürliche Zahl n, so dass G mit n Farben gefärbt werden kann. Man bezeichnet die chromatische Zahl von G mit χ (chi).
Kreise gerader Länge haben zum Beispiel die chromatische Zahl 2, Kreise ungerader Länge die chromatische Zahl 3.

Jetzt lässt sich die Vierfarbenvermutung als Frage folgendermassen formulieren: Ist die chromatische Zahl eines jeden planaren Graphen höchstens vier? Diese Frage kann wiederum mit Hilfe des Greedy-Algorithmuses gelöst werden.

> *Greedy-Algorithmus: Jeder Graph G kann mit $\Delta(G) + 1$ Farben gefärbt werden.*
> *Mit anderen Worten: Es gilt $\chi(G) <= \Delta(G) + 1$.*

Zur Lösung des Vierfarbenproblems wurde 1976 der Vierfarbensatz von Apel und Haken bewiesen. Der Satz lautet:

> *Die chromatische Zahl eines planaren Graphen ist höchstens 4. Das bedeutet: In jeder ebenen Landkarte können die Länder so mit vier Farben gefärbt werden, dass je zwei Länder, die ein Stück gemeinsame Grenze haben, verschieden gefärbt sind.*

Der Beweis für diesen Satz ist leider überaus kompliziert. Aufbauend auf den Vierfarbensatz gilt allerdings auch der Fünffarbensatz, der mittels Induktion bewiesen werden kann. Der Fünffarbensatz lautet:

> *Die chromatische Zahl eines planaren Graphen ist höchstens 5. Das bedeutet: In jeder ebenen Landkarte können die Länder so mit fünf Farben gefärbt werden, dass je zwei Länder, die ein Stück gemeinsame Grenze haben, verschieden gefärbt sind.*

Anwendungen für die Graphentheorie:

Graphen haben mannigfaltige Anwendungen in der realen Welt und sind auch für viele Probleme in der Informatik von essentieller Bedeutung. Hierbei werden die Problemstellungen jeweils so modelliert, dass sie mit der Darstellung als Graph kompatibel sind. Es müssen sich jedenfalls geeignete Ecken und Kanten finden lassen.

Einige Anwendungen sind:

- Die Simulierung von Verkehrsflüssen. Die Strassenkreuzungen sind hierbei die Ecken und die Kanten zwischen diesen sind die Strassen.
- Routenplaner. Wieder sind Ecken und Kanten stellvertretend für Städte/Orte und Strassen. Das Travelling Salesman Problem stellt hier zb besondere Anforderungen da es eine Rundreise kürzester Länge finden will, eben optimal geeignet für einen Vertreter der alle seine potentiellen Kunden mit möglichst wenig Aufwand besuchen will.
- Strukturformeln für Moleküle.
- Elektrische Netzwerke
- Frequenzzuweisungen im Mobilfunk
- In der Informatik zum Beispiel zum visualisieren von Speicherstrukturen. Oder auch um Prozesse zu beschreiben. Endliche Automaten sind ebenfalls Graphen.

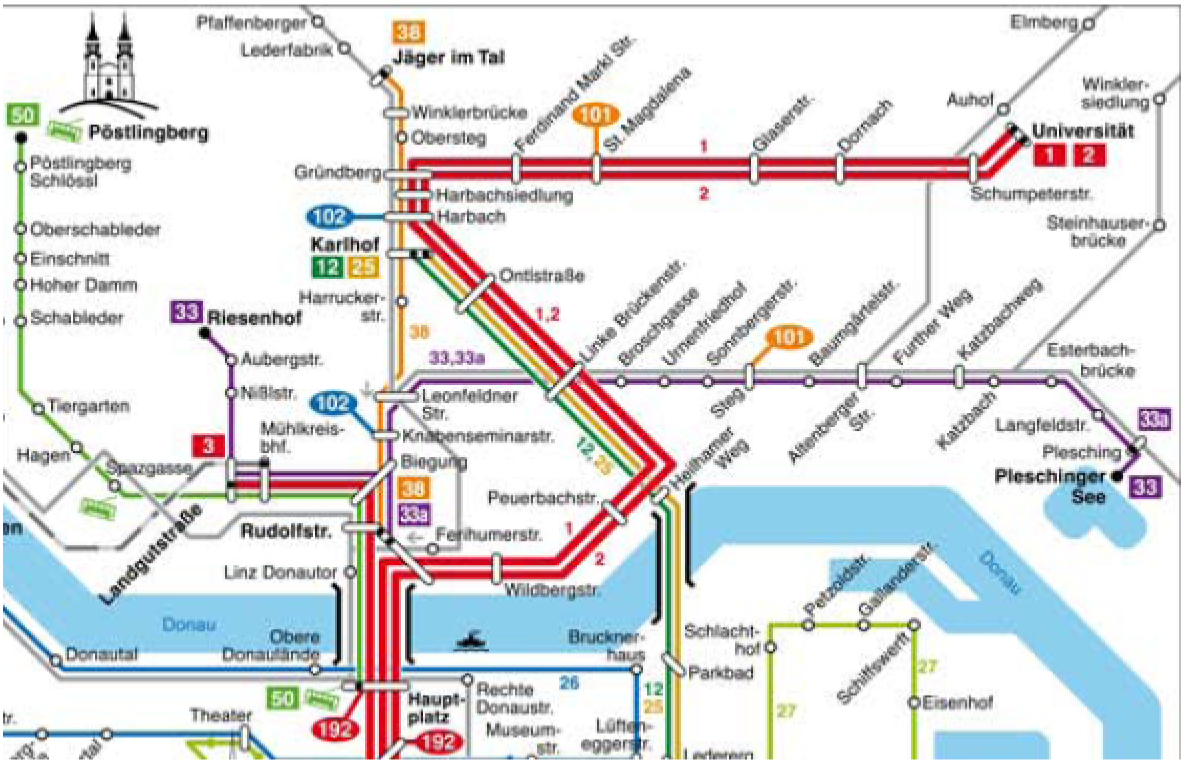


Abb. 13: Ausschnitt Streckennetz der Linzer Linien

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

Albrecht Beutelspacher, Marc-Alexander Zschiegner: "Diskrete Mathematik für Einsteiger", Springer Verlag, 3., erweiterte Auflage

Gerald Teschl, Susanne Teschl: "Mathematik für Informatiker", Springer Verlag, 3. Auflage

Andreas Solymosi, Ulrich Grude: "Grundkurs Algorithmen und Datenstrukturen in Java, Eine Einführung in die praktische Informatik", vieweg Verlag, 3., überarbeitete und erweiterte Auflage

Angelika Steger, "Diskrete Strukturen - Band 1: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra", Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2002, 2007, 2. Auflage

Reinhard Diestel: "Graphentheorie, Elektronische Ausgabe", Springer Verlag Heidelberg 1996, 2000, 2006

http://de.wikipedia.org/wiki/Isomorphie_von_Graphen; Zugriff am 04.12.2009

http://mata.gia.rwth-aachen.de/Vortraege/Joerg_Hendricks/Graphen/script/Graphen.html; Zugriff am 05.12.2009

http://www.mathepedia.de/Spannbaum.aspx; Zugriff am 28.11.2009

http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Kuratowski; Zugriff am 05.12.2009

http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Students/Win/fg09s/lec/graph.pdf; Zugriff am 05.12.2009