

Seminar Algebra

Der Satz von Ramsey

Ein Theorem aus der Ordnungstheorie
und seine Anwendungen

Theorem

Die Anzahl der Teilmengen einer Menge X mit
Kardinalität $|X| \geq 1$ beträgt

$$2^{|X|}$$

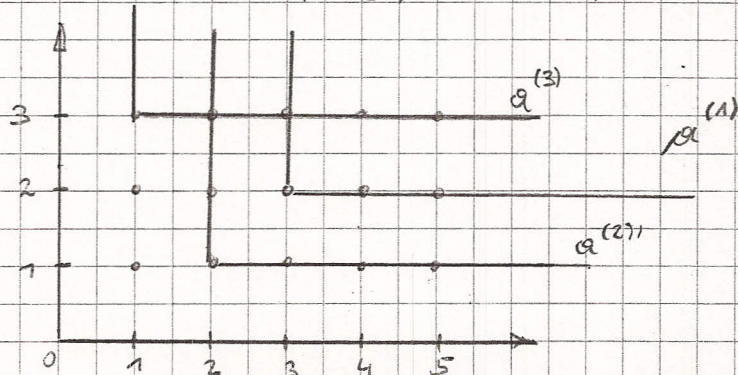
Theorem

Die Anzahl der p -elementigen Teilmengen einer Menge X
mit Kardinalität $|X| \geq 1$ beträgt

$$\binom{|X|}{p} = \frac{|X|!}{p!(|X|-p)!}$$

Beispiel (geordnete Menge)

$$M = \mathbb{N}_0^2 = (\alpha_1, \alpha_2) \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_0$$



Hier ist $\alpha^{(2)} \in \alpha^{(1)}$

Definition

Eine geordnete Menge $(M, \leq)$ erfüllt die (DCC) (absteigende Kettenbedingung) wenn es keine unendlich echt absteigende Folge

$$m_1 > m_2 > m_3 > \dots$$

von Elementen aus M gibt.

Beispiel : $(\mathbb{N}, \leq)$

Definition

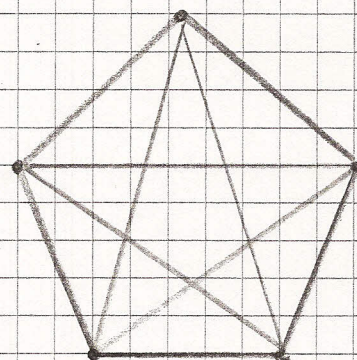
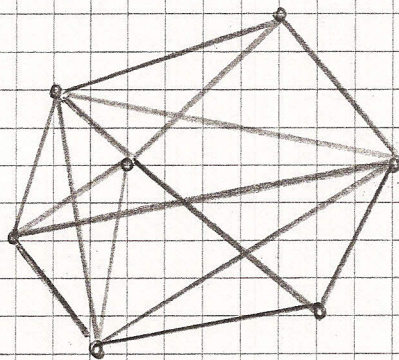
Zwei Elemente $s, t \in M$ sind unvergleichbar, wenn weder $s \leq t$ noch $t \leq s$ gilt. Wir schreiben

$$s \parallel t$$

Eine Teilmenge T von M ist eine Antikette, wenn alle $t_1, t_2 \in T$ mit $t_1 \neq t_2$ unvergleichbar sind.

Ramsey Theorie

Betrachte einen Graphen, indem wir jede Kante mit einer Farbe färben



Graph enthält ein Dreieck mit drei gleichfarbigen Kanten oder nicht. So ein Dreieck heißt monochromatisches Dreieck (oben: 2).

Ramsey Theorie zeigt: Vollständiger Graph K_n enthält

für $n \geq 6$ ein monochromatisches Dreieck

Wenn 6 Personen auf einer Party sind, dann gibt es entweder 3 Personen die einander kennen (kennen als symmetrische Beziehung) oder 3 Personen die sich einander nicht kennen

Theorem (Ramsey)

Sei X eine unendliche Menge, und seien $r, A \in \mathbb{N}$

Sei

$$F: \binom{X}{r} \rightarrow \{1, \dots, A\}$$

Dann gibt es eine unendliche Teilmenge Y von X sodass F auf $\binom{Y}{r}$ konstant ist.

Beweis

Zur Vorstellung: Für $r=2: \binom{X}{2} = \text{Graphen}$

Sei F die Färbung der Kanten eines Graphen mit A Farben

Wenn X eine unendliche Menge ist, dann gibt es einen unendlichen Teilgraphen der einfärbig ist.

Beweis mit Induktion über r

Induktionsanfang: $r=1$

Färbe 1-elementige Teilmengen = Punkte oder

Wenn man unendlich viele Punkte mit endlich Farben färbt, ist eine Farbe unendlich oft verwendet.

$\Rightarrow$ Eine Teilmenge $Y_1, \dots, Y_A$ wobei $Y_i = \{x \in X \mid F(\{x\}) = i\}$

Induktionshypothese Für X eine unendliche Menge, $r, k \in \mathbb{N}$ beliebig oder fest, $F: \binom{X}{r-1} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ dann existiert eine unendliche Teilmenge Y von X so dass F auf Y konstant ist.

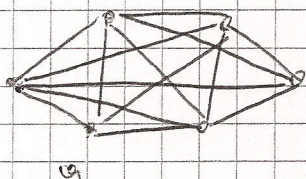
Induktionsschritt $r \geq 2$

Es gibt Punkte, wo Graph der nur aus den Punkten (mit Verbindungen) besteht, und ganzen Graph selbe Farbe hat.

Sei $F: \binom{X}{r} \rightarrow \{1, \dots, k\}$

für jedes $\alpha \in X$ definieren wir die Färbung G_α der $(r-1)$ elementigen Teilmengen von $X \setminus \{\alpha\}$ durch

$$G_\alpha(M) = F(M \cup \{\alpha\}) \quad \text{für alle } M \in \binom{X \setminus \{\alpha\}}{r-1}$$



G_α

die Punkte werden so gefärbt, wie die Linie von α weg zu diesem Punkt ist

Nun definieren wir $(x_i)_{i \geq 0}$ aus X und eine Folge $(Y_i)_{i \geq 0}$ von Teilmengen von X . Dazu wählen wir $Y_0 := X$, $x_0 \in X$. Für $i \in \mathbb{N}_0$ definieren wir Y_{i+1} und x_{i+1} .

konstruieren so

Wir ~~vermuten~~ dass Y_i unendlich ist und dass $x_i \in Y_i$

Da $Y_i \setminus \{x_i\}$ unendliche Teilmenge ist existieren nach Voraussetzung unendliche Teilmengen Y_{i+1} von $Y_i \setminus \{x_i\}$ so dass alle $(r-1)$ elementigen Teilmengen von Y_{i+1} die gleiche Farbe unter der Färbung G_{x_i} haben.

Das Element x_{i+1} wählen wir aus Y_{i+1} .

Wir definieren nun $Z = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ alle Elemente die wir auf diesem Weg (einmal) ausgewählt haben.

Für jede p -elementige Teilmenge A von Z definieren wir den kleinsten Index in A , $\text{ind}(A) = \min \{j \in \mathbb{N}_0 \mid x_j \in A\}$

Es gilt: $\forall A, B \in \binom{Z}{p}$ mit $\text{ind}(A) = \text{ind}(B)$ gilt $F(A) = F(B)$

Wenn das nicht so wäre
(schon gereicht wäre) dann
sind wir fertig

$i = \text{ind}(A)$: Alle x_j mit $j > i$ liegen in Y_{i+1} . Folglich gilt $A \subseteq \{x_i\} \cup Y_{i+1}$. Da $\text{ind}(A) = \text{ind}(B) = i$ gilt folgt $B \subseteq \{x_i\} \cup Y_{i+1}$. Wegen der Konstruktion von Y_{i+1} ist $G_{x_i}(A \setminus \{x_i\}) = G_{x_i}(B \setminus \{x_i\})$. Also gilt $F(A) = F(B)$.

Betrachte nun $h: \mathbb{N}_0 \rightarrow \{1, \dots, A\}$

$$i \mapsto h(i) := F(\underbrace{\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p-1}\}}_{p \text{ Stück}})$$

Es gibt also $J \subseteq \mathbb{N}_0$, sodass $h|_J$ konstant und J unendlich ist

Behauptung: $Y := \{x_j \mid j \in J\}$ hat die gewünschten Eigenschaften

Seien C, D p -elementige Teilmengen von Y , $c_1 < \dots < c_p$,

$d_1 < \dots < d_p \in \mathbb{N}_0$ so, dass $C = \{x_{c_1}, \dots, x_{c_p}\}$, $D = \{x_{d_1}, \dots, x_{d_p}\}$

$$F(C) = F(\{x_{c_1}, x_{c_1+1}, \dots, x_{c_1+(p-1)}\}) = h(c_1) \quad \text{und}$$

$$F(D) = F(\{x_{d_1}, \dots, x_{d_1+(p-1)}\}) = h(d_1)$$

$$c_1, d_1 \in J \Rightarrow h(c_1) = h(d_1)$$

C und D haben die gleiche Farbe



Theorem Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge, und sei $(x_i)_{i \geq 0} \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge aus X . Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{g(i)})$ (g strikt monoton wachsend), die entweder monoton wachsend oder schwach monoton fallend, oder in der alle Elemente paarweise unvergleichbar sind.

Beweis

Wir färben die zweielementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$

Für $i < j$ färben wir

$$F(\{i, j\}) = \begin{cases} 1 & x_i \leq x_j \\ 2 & x_i \geq x_j \\ 3 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ramsey liefert unendliche Menge $Y \subseteq \mathbb{N}$, sodass F auf $\binom{Y}{2}$ konstant ist. $Y = \{g(0), g(1), \dots\}$ mit $g(0) < g(1) < \dots$ $(x_{g(i)})_{i \geq 0}$

- wenn F auf $\binom{Y}{2}$ immer 1 ist, dann gilt für $k \leq l$ immer $x_{g(k)} \leq x_{g(l)}$

$$\begin{array}{l} \circ \text{ ————— } 2 \text{ ————— } x_{g(2)} \geq x_{g(1)} \\ \circ \text{ ————— } 3 \text{ ————— } x_{g(2)} \parallel x_{g(1)} \end{array}$$

□

Korollar

Jede reelle Zahlenfolge enthält eine streng monoton fallende oder eine streng monoton steigende oder eine (unendliche) konstante Teilfolge

□

Theorem

Sei $m \in \mathbb{N}$, und sei $S = \{a^{(i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Elementen aus $\mathbb{N}_0^m$. Dann gibt es eine unendliche Folge $A_1 < A_2 < \dots$ von natürlichen Zahlen sodass $\{a^{(A_i)} \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine bezüglich $\leq$ schwach monoton wachsende unendliche Teilfolge von S ist.

Beweis

Für $i \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, m\}$ bezeichnen wir die k -te Komponente von $a^{(i)}$ mit $a_k^{(i)}$. Wir färben nun jede 2-elementige Teilmenge $\{i, j\}$ von $\mathbb{N}$ mit $i < j$ mit einer von 2^m Farben. Als Farben wählen wir die Funktionen von $\{1, \dots, m\}$ nach $\{1, 2\}$. Wir definieren nun die Farbe $C(\{i, j\})$ der Menge $\{i, j\}$ durch

$$C(\{i, j\})(k) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a_k^{(i)} \leq a_k^{(j)} \\ 2 & \text{wenn } a_k^{(i)} > a_k^{(j)} \end{cases}$$

Ramsey liefert eine unendliche Teilmenge T von $\mathbb{N}$, so dass alle 2-elementigen Teilmengen von T die gleiche Farbe C haben.

Wir zeigen dass $C(k) = 1$ für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ gilt. Nehmen wir an, es gibt ein k s.d. $C(k) = 2$.

Seien $A_1 < A_2 < \dots$ die Elemente von T . Wenn $C(k) = 2$ dann gilt

$$a_k^{(A_1)} > a_k^{(A_2)} > \dots$$

⚡ $(\mathbb{N}, \leq)$ erfüllt die (DCC)

$$\Rightarrow C(k) = 1 \quad \forall k, \text{ und } a^{(A_1)} \leq a^{(A_2)} \leq \dots$$

Theorem (Dedekind's Lemma)

Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann sind alle Antiketten in $(\mathbb{N}_0^m, \subseteq)$ endlich.

Beweis

Wegen dem vorigen Theorem kann $(\mathbb{N}_0^m, \subseteq)$ keine unendliche Antikette haben.

□

Literatur

Erhard Aichinger, Kommutative Algebra und algebraische Geometrie, Vorlesungsunterlagen