Seminar Algebra

Algebraische Vorkenntnisse

(1) (Ringe) Sei R ein endlicher Ring (nicht notwendigerweise mit Einselement). Wir definieren $R^1 := R$ und $R^n := \{r \cdot s \mid r \in R, s \in R^{n-1}\}$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass es genau dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $R^n = \{0\}$ gibt, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $r \in R$ die Gleichung $r^m = 0$ gilt.

(2) Sei G eine Gruppe, und sei $Z(G)$ ihr Zentrum. Mit $\operatorname{Inn} G$ bezeichnen wir die Menge

$$\{f : G \to G \mid \exists g \in G \forall x \in G : f(x) = g^{-1}xg\}.$$

Zeigen Sie, dass alle Abbildungen in $\operatorname{Inn} G$ bijektiv sind, und dass $(\operatorname{Inn} G, \circ)$ eine Gruppe ist. Zeigen Sie, dass diese Gruppe isomorph zu $G/Z(G)$ ist.

(3) Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe, und sei $(T_2(G), \cdot)$ die Gruppe aller zweistelligen Termfunktionen. Zeigen Sie, dass $T_2(G) = \{(x, y) \mapsto x^a \cdot y^b \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ genau dann gilt, wenn G abelsch ist.

(4) Welche der folgenden Gruppen sind abelsch/nilpotent/auflösbar? $(\mathbf{Z}_p, +)$, $(\mathbf{Z}_p^*, \cdot)$, S_2, S_3, S_4, S_5, A_5, $\mathrm{GL}(2, 2)$.

Vorkenntnisse aus der Automatentheorie

(1) Konstruieren Sie einen endlichen Automaten, der genau jene 0/1-Folgen akzeptiert, in denen sowohl die Anzahl der Einser als auch die der Nuller durch 3 teilbar ist.

Vorträge aus der Automatentheorie.

(1) Definition endlicher Automaten [1, Kapitel 2.2].
(2) Nichtdeterministische endliche Automaten [1, Kapitel 2.3].
(3) Reguläre Ausdrücke [1, Kapitel 2.5].
(4) “Pumping Lemma” für reguläre Mengen [1, Kapitel 3.1].
(5) Abgeschlossenheitseigenschaften für reguläre Mengen [1, Kapitel 3.2].

Literatur

[1] John E. Hopcroft and Jeffrey D. Ullman. *Introduction to automata theory, languages, and computation.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1979. Addison-Wesley Series in Computer Science.